

A. Exercice préliminaire :

Q1. Déterminer le torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport au bâti 0 :

$$\{V(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(A, 1/0) \end{array} \right\}_A$$

$$\{V(1/0)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(A, 1/0) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x}(t) \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_A$$

Q2. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

$$\overrightarrow{AB} = L \cdot \cos\alpha \cdot \vec{x}_0 + L \cdot \sin\alpha \cdot \vec{y}_0$$

Q3. Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(2/1)$.

$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$$

Q4. Donner le vecteur vitesse $\vec{V}(A, 2/1)$.

$$\vec{V}(A, 2/1) = \vec{0}$$

Q5. En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 2/1)$.

$$\vec{V}(B, 2/1) = -L \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\alpha \cdot \vec{x}_0 + L \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \vec{y}_0$$

Q6. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OB}$ dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

$$\overrightarrow{OB} = (x + L \cdot \cos\alpha) \vec{x}_0 + L \cdot \sin\alpha \cdot \vec{y}_0$$

Q7. Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(2/0)$.

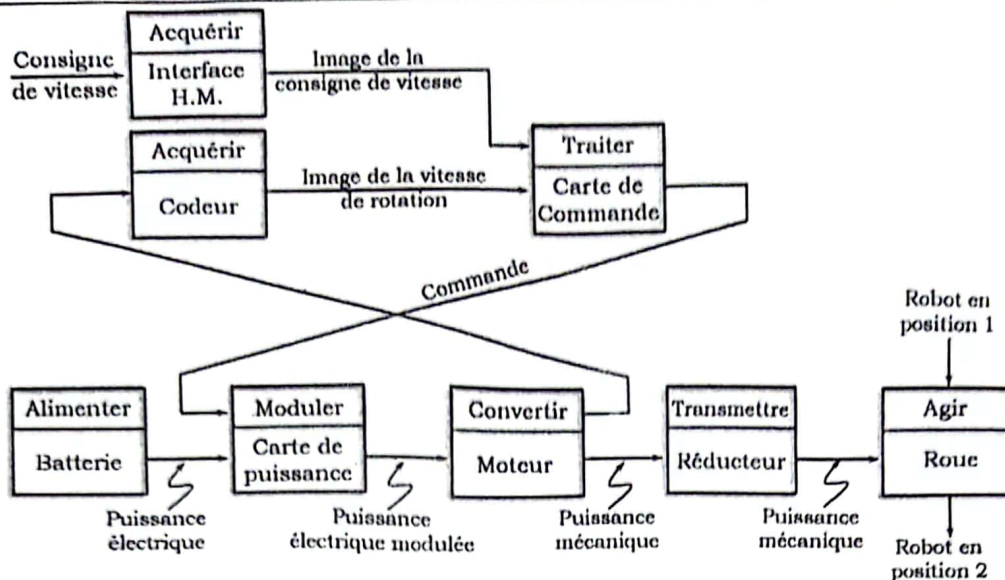
$$\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1$$

Q8. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 2/0)$.

$$\vec{V}(B, 2/0) = (\dot{x}(t) - L \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\alpha) \vec{x}_0 + L \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot \vec{y}_0$$

Fin de l'exercice

Q9. A partir du diagramme de définition de blocs (**figure 4**), compléter, sur le document réponse DR2, la chaîne fonctionnelle du robot.



B. Etude de l'asservissement en vitesse du robot CAMP :

Q10. Déterminer les expressions des gains statiques K_m et K_C , de la constante de temps τ , du facteur d'amortissement ξ et de la pulsation propre ω_0 en fonction des données : k, R, L, J_{eq} .

$H_m(p) = \frac{\frac{k}{R+L \cdot p} \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}}{1 + \frac{k}{R+L \cdot p} \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot k} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{k^2} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{k^2} \cdot p^2}$	$K_m = \frac{1}{k}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k^2}{L \cdot J_{eq}}}$	$\xi = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{J_{eq}}{L \cdot k^2}}$
--	---------------------	--	---

$H_C(p) = \frac{1}{\frac{k}{R+L \cdot p}} \cdot H_m(p) = \frac{\frac{R}{k^2} \cdot \left(1 + \frac{L}{R} \cdot p\right)}{1 + \frac{R \cdot J_{eq}}{k^2} \cdot p + \frac{L \cdot J_{eq}}{k^2} \cdot p^2}$	$K_C = \frac{R}{k^2}$	$\tau = \frac{L}{R}$
--	-----------------------	----------------------

Q11. Donner la relation entre K_{Conv} , K_{Cap} et K_R permettant d'obtenir un asservissement de $V(p)$ sur la consigne $V_C(p)$.

Q12. Donner l'expression de K en fonction de K_{Cap} , K_a et K_m .

Q11.	$K_{Conv} = \frac{K_{Cap}}{K_R}$	Q12.	$K = K_{Cap} \cdot K_a \cdot K_m$
-------------	----------------------------------	-------------	-----------------------------------

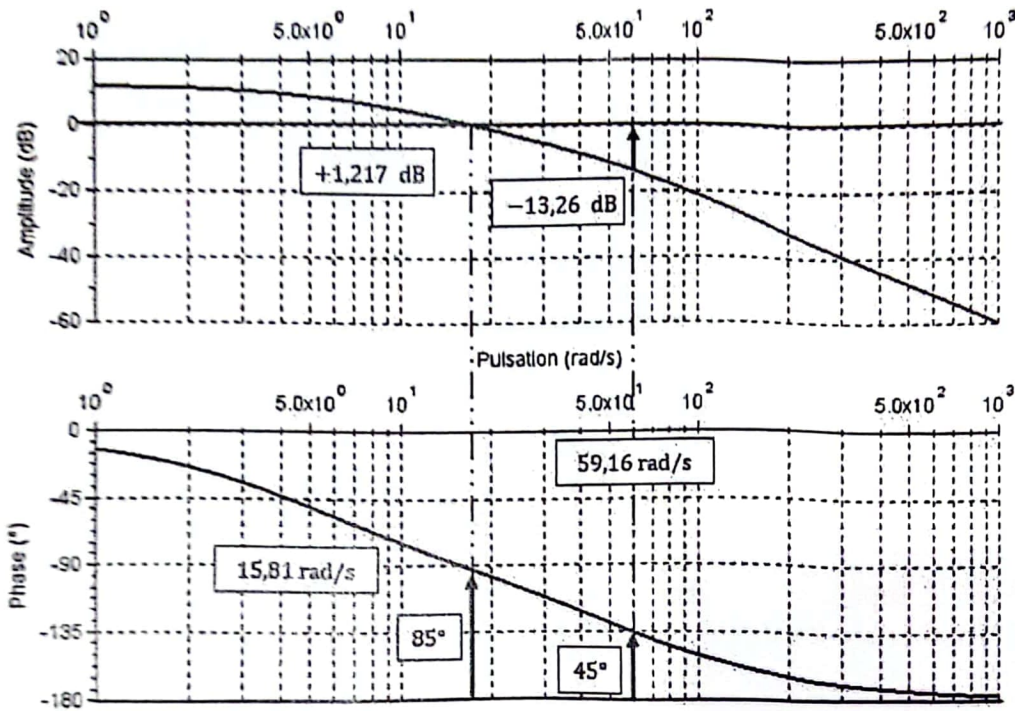
Q13. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$. Préciser son gain K_{BO} , sa classe et son ordre. Sous quelle condition, on peut l'écrire sous la forme :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

$H_{BO}(p) = \frac{K_p \cdot K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$	$K_{BO} = K_p \cdot K$ Classe 0, ordre 2 Condition : $\xi > 1$
---	--

Q14. Indiquer graphiquement sur le **document réponse DR3**, la marge de phase non corrigée notée $M\varphi_{nc}$ puis donner sa valeur. Quelle est la marge du gain non corrigée du système MG_{nc} ?

Q15. Déterminer la valeur de K_{pdB} permettant d'avoir une marge de phase de 45° . Indiquer graphiquement K_{pdB} sur le **document réponse DR3**.



$M\varphi_{nc} = \text{entre: } 85^\circ \text{ et } 90^\circ$

$MG_{nc} = +\infty$

Q15.

$K_{pdB} = +13,26$ dB

Q16. Déterminer l'erreur statique $\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_v(t)$ pour un échelon unitaire de vitesse. Est-ce qu'il existe une valeur réaliste de K_p qui permet d'annuler l'erreur statique ε_s ?

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_v(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \varepsilon_v(p) = \frac{1}{1 + K_p \cdot K}$$

L'augmentation de K_p permet juste de diminuer ε_s .

Q17. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$. En déduire les expressions des paramètres canoniques K_{BF} , ω_{0BF} et ξ_{BF} en fonction de K_{BO} , ξ et ω_0 .

$H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0 \cdot (1 + K_{BO})} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2 \cdot (1 + K_{BO})}}$	$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}$
	$\omega_{0BF} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 + K_{BO}}$
	$\xi_{BF} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K_{BO}}}$

Q18. Déterminer la valeur de K_p permettant d'avoir la réponse la plus rapide. Sachant que $t_{r5\%} \cdot \omega_{0BF} = 3$, déterminer la valeur du $t_{r5\%}$. Pour cela, il est conseillé, pour les valeurs numériques, d'exploiter les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ non corrigée ($K_p = 1$) fournis sur le document réponse DR3.

Réponse plus rapide : $\xi_{BF} = 0,7$		
Paramètres de $H_{BO}(p)$ par identification : diagrammes de Bode	$\varphi(\omega_0) = -90^\circ \rightarrow \omega_0 = 15,81 \text{ rad/s}$	$20.\log K = 12 \text{ dB}, \quad K = 4$
	$G_{dB}(\omega_0) = 20.\log \frac{K}{2.\xi} = 1,217 \text{ dB} \rightarrow \frac{K}{2.\xi} = 10^{\frac{1,217}{20}} \rightarrow \xi = \frac{4}{2.10^{\frac{1,217}{20}}}$	
	$\xi = 1,74$	
On a : $\xi_{BF} = \frac{\xi}{\sqrt{1+K.K_p}} = \frac{\xi}{\sqrt{1+K.K_p}} \rightarrow 1 + K.K_p = \left(\frac{\xi}{\xi_{BF}}\right)^2 \rightarrow K_p = \frac{1}{K} \cdot \left(\left(\frac{\xi}{\xi_{BF}}\right)^2 - 1\right) \rightarrow K_p = 1,29$		
$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_{0BF}} = \frac{3}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 + K \cdot K_p}} \rightarrow t_{r5\%} = 0,076 \text{ s}$		

Q19. Justifier, sans calcul, que ce correcteur ne permet pas d'avoir une fonction de transfert en boucle fermée sous la forme d'un deuxième ordre fondamental.

Le retour étant unitaire la FTBF et la FTBO auront le même ordre. Avec ce correcteur PI la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée devient d'ordre 3, donc la FTBF aussi.

Q20. Rappeler l'effet de ce correcteur P.I sur la précision et la stabilité du système.

Le correcteur PI de fonction de transfert : $C(p) = K_i \cdot \frac{1+T_i p}{T_i p}$

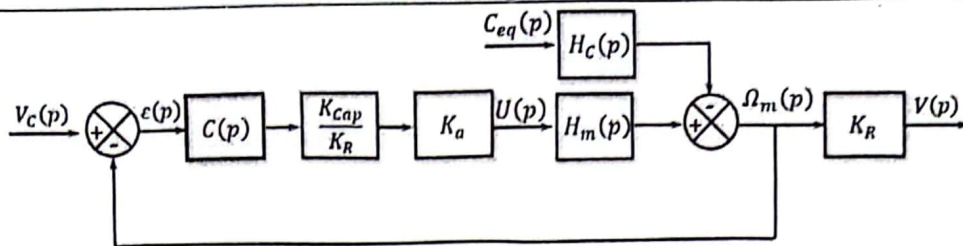
Ce correcteur permet d'améliorer la précision en annulant l'écart statique tout en préservant la stabilité

Q21. Déterminer, analytiquement, la valeur K_i pour régler la marge de phase $M\varphi_C = 45^\circ$.

$H_{BOC}(p) = \frac{20 \cdot K_i}{p \cdot (1 + 0,02 \cdot p)}$	$M\varphi_C = 180^\circ + \varphi_C(\omega_{0dB})$	$\ H_{BOC}(j\omega_{0dB})\ = 1$ $\omega_{0dB} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ rad/s}$
	$M\varphi_C = 45^\circ \quad \varphi_C(\omega_{0dB}) = -135^\circ$	
$20 \cdot K_i = \omega_{0dB} \cdot \sqrt{2}$	$K_i = 3,53$	

Q22. Conclure, sans calcul, quant à l'influence d'un couple perturbateur constant sur la stabilité et la précision du système.

Le schéma bloc de l'asservissement peut être ramené au schéma bloc ci-après :



- Présence d'un intégrateur en amont du point d'injection de la perturbation. L'asservissement est insensible à une perturbation échelon.
- $V(p) = H_{BF}(p) \cdot V_C(p) - H_{perturbation}(p) \cdot C_{eq}(p)$ Les deux fonctions $H_{BF}(p)$ et $H_{perturbation}(p)$ ont les mêmes dénominateurs, donc ils ont les mêmes pôles. La perturbation n'entraîne pas l'instabilité.

C. Etude dynamique du manipulateur :

Q23. Expliciter la démarche permettant de déterminer l'équation différentielle du mouvement de 4 par rapport au repère R_1 . Aucun calcul n'est demandé. Le choix du

On isole 4 (le solide 4 n'entraîne aucun autre solide). On applique le TMD en C en projection sur $\vec{y}_2$, afin d'éviter les inconnues statiques de la liaison 4/3 pivot d'axe C, $\vec{y}_2$.

Q24. Sachant que $\vec{BG}_{34} = L_{34} \cdot \vec{x}_3$, déterminer L_{34} en fonction de M_T , M_P et L . système isolé et du théorème appliqué est à justifier.

$$(M_T + M_P) \cdot \vec{BG}_{34} = M_T \cdot \vec{BG}_T + M_P \cdot \vec{BD} ; \text{Proj}/\vec{x}_3 : (M_T + M_P) \cdot L_{34} = M_T \cdot L + M_P \cdot 2L$$

$$L_{34} = L \cdot \left(\frac{M_T + 2M_P}{M_T + M_P} \right)$$

Q25. Déterminer B_{34} et C_{34} en fonction de M_T , M_P et L .

$$B_{34} = J_{(B, \vec{y}_3)}(T) + J_{(B, \vec{y}_3)}(P)$$

$$\text{Théorème de Huygens : } \begin{cases} J_{(B, \vec{y}_3)}(T) = \frac{M_T \cdot (2L)^2}{12} + M_T \cdot (L)^2 = \frac{M_T \cdot 4L^2}{3} \\ J_{(B, \vec{y}_3)}(P) = 0 + M_P \cdot (2L)^2 = M_P \cdot 4L^2 \end{cases}$$

$$\text{Ce qui donne : } B_{34} = \frac{M_T \cdot 4L^2}{3} + M_P \cdot 4L^2 ; \text{ de même : } C_{34} = B_{34} = \frac{M_T \cdot 4L^2}{3} + M_P \cdot 4L^2$$

Q26. Déterminer le torseur cinématique de l'ensemble 34 dans son mouvement par rapport l'embase fixe 1, noté : $\{V(34/1)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(34/1) \\ \vec{V}(B, 34/1) \end{matrix} \right\}_B$.

$$\{V(34/1)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(34/1) \\ \vec{V}(B, 34/1) \end{matrix} \right\}_B ; \vec{V}(B, 34/1) = \left[\frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} = a_2 \left[\frac{d\vec{x}_2}{dt} \right]_{R_1} \quad \{V(34/1)\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 \\ a_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 \end{matrix} \right\}_B$$

Q27. Le torseur cinétique de l'ensemble 34 dans son mouvement par rapport l'embase fixe 1 est noté : $\{C(34/1)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_C(34/1) \\ \vec{\sigma}(B, 34/1) \end{matrix} \right\}_B$. Déterminer :
la résultante cinétique $\vec{R}_C(34/1)$.
le moment cinétique $\vec{\sigma}(B, 34/1)$.

$$\{C(34/1)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_C(34/1) \\ \vec{\sigma}(B, 34/1) \end{matrix} \right\}_B$$

$$\begin{aligned} \text{a. } \vec{R}_C(34/1) &= M_{34} \cdot \vec{V}(G_{34}, 34/1) = M_{34} \cdot \left(\left[\frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} + \left[\frac{d\vec{BG}_{34}}{dt} \right]_{R_1} \right) = M_{34} \cdot \left(\left[\frac{d\vec{AB}}{dt} \right]_{R_1} + L_{34} \left[\frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_{R_1} \right) \\ &= M_{34} \cdot (a_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 + L_{34}(\dot{\beta} \cdot \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_2)) \wedge \vec{x}_3 = M_{34} \cdot [(a_2 + L_{34} \cdot \cos \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_3 - L_{34} \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_3] \end{aligned}$$

$$\text{b. } \vec{\sigma}(B, 34/1) = I(B, 34) \cdot \vec{\Omega}(34/1) + M_{34} \cdot \vec{BG}_{34} \wedge \vec{V}(B, 34/1)$$

$$\text{On a : } \vec{\Omega}(34/1) = -\dot{\alpha} \cdot \sin \beta \cdot \vec{x}_3 + \dot{\beta} \cdot \vec{y}_3 + \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \cdot \vec{z}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(B, 34/1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & C_{34} \end{pmatrix}_{\vec{b}_3} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \cdot \sin \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \cos \beta \end{pmatrix}_{\vec{b}_3} + M_{34} \cdot L_{34} \cdot \vec{x}_3 \wedge a_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_{23} \\ \rightarrow \vec{\sigma}(B, 34/1) &= B_{34} \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_3 + (M_{34} \cdot L_{34} \cdot a_2 + C_{34} \cdot \cos \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_3 \end{aligned}$$

Q28. Donner la projection du moment cinétique $\vec{\sigma}(A, 2/1)$ sur $\vec{z}_2$.

$$\vec{\sigma}(A, 2/1) \cdot \vec{z}_2 = J \cdot \dot{\alpha}$$

Q29. Expliquer d'une manière détaillée quel(s) théorème(s) et quel(s) isolement(s) permettant d'obtenir :

L'équation Eq_1 . En déduire les expressions de A_1 et B_1 en fonction M_{34} , g , L_{34} , L , F_{Ch} et f_{23} .

L'équation Eq_2 . En déduire les expressions de A_2 , B_2 et C_2 en fonction C_{34} , J , β et f_{12} .

a- On isole (34). On applique le T.M.D en B en projection sur $\vec{y}_2$:

$$\vec{y}_2 \cdot \vec{M}(B, \overline{34} \rightarrow 34) = \vec{y}_2 \cdot \vec{\sigma}(B, 34/1)$$

$$\text{On a : } \vec{y}_2 \cdot \vec{\sigma}(B, 34/1) = B_{34} \cdot \ddot{\beta} + (C_{34} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + M_{34} \cdot L_{34} \cdot a_2 \cdot \sin \beta) \cdot \dot{\alpha}^2$$

$$\vec{M}(B, \overline{34} \rightarrow 34) = \vec{M}(B, 2 \rightarrow 34) + \vec{M}(B, M_{23} \rightarrow 34) + \vec{M}(B, f \rightarrow 34) + \vec{M}(B, Ch \rightarrow 34) + \vec{M}(B, pes \rightarrow 34)$$

- $\vec{y}_2 \cdot \vec{M}(B, 2 \rightarrow 34) = 0$
- $\vec{y}_2 \cdot \vec{M}(B, M_{23} \rightarrow 34) = C_{m23}$
- $\vec{y}_2 \cdot \vec{M}(B, frott \rightarrow 34) = -f_{23} \cdot \dot{\beta}$
- $\vec{y}_2 \cdot \vec{M}(B, pes \rightarrow 34) = \vec{y}_2 \cdot (\vec{BG}_{34} \wedge -M_{34} \cdot g \cdot \vec{z}_1) = \vec{y}_2 \cdot (L_{34} \cdot \vec{x}_3 \wedge -M_{34} \cdot g \cdot \vec{z}_1) = M_{34} \cdot g \cdot L_{34} \cdot \cos \beta$
- $\vec{y}_2 \cdot \vec{M}(B, Charge \rightarrow 34) = \vec{y}_2 \cdot (\vec{BD} \wedge F_{Ch} \cdot \vec{z}_2) = \vec{y}_2 \cdot (2 \cdot L \cdot \vec{x}_3 \wedge F_{Ch} \cdot \vec{z}_2) = -2L \cdot F_{Ch} \cdot \cos \beta$

On déduit l'équation Eq_1 :

$$\begin{aligned} C_{m23} - f_{23} \cdot \dot{\beta} + (M_{34} \cdot g \cdot L_{34} - 2L \cdot F_{Ch}) \cdot \cos \beta &= B_{34} \cdot \ddot{\beta} + (C_{34} \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + M_{34} \cdot L_{34} \cdot a_2 \cdot \sin \beta) \cdot \dot{\alpha}^2 \\ A_1 &= -f_{23} ; B_1 = M_{34} \cdot g \cdot L_{34} - 2L \cdot F_{Ch} \end{aligned}$$

b- On isole E_{234} . On applique le T.M.D en A en projection sur $\vec{z}_1$.

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{M}(A, \overline{E_{234}} \rightarrow E_{234}) = \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}(A, E_{234}/1)$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}(A, E_{234}/1) = \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}(A, 2/1) + \vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}(A, 34/1) = J\ddot{\alpha} + \left[\frac{d[\vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}(A, 34/1)]}{dt} \right]_{R_1}$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}(A, 34/1) = \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}(B, 34/1) + \vec{z}_1 \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{R_C}(34/1))$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}(B, 34/1) = (C_{34} \cdot \cos^2 \beta + M_{34} \cdot L_{34} \cdot a_2 \cdot \cos \beta) \cdot \dot{\alpha}$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}(A, 34/1) = \vec{z}_{12} \cdot (B_{34} \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_{32} + (M_{34} \cdot L_{34} \cdot a_2 + C_{34} \cdot \cos \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_3)$$

$$+ \vec{z}_{12} \cdot (a_2 \cdot \vec{x}_2 \wedge M_{34} \cdot [(a_2 + L_{34} \cdot \cos \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_{32} - L_{34} \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{z}_3])$$

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 \cdot \vec{\sigma}(A, 34/1) &= (M_{34} \cdot L_{34} \cdot a_2 + C_{34} \cdot \cos \beta) \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta + M_{34} \cdot a_2 \cdot (a_2 + L_{34} \cdot \cos \beta) \cdot \dot{\alpha} \\ &= \dot{\alpha} [C_{34} \cdot \cos^2 \beta + M_{34} \cdot (2L_{34} \cdot a_2 \cdot \cos \beta + a_2^2)] \end{aligned}$$

On aura donc :

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}(A, E_{234}/1) = \ddot{\alpha} [J + C_{34} \cdot \cos^2 \beta + M_{34} \cdot (2L_{34} \cdot a_2 \cdot \cos \beta + a_2^2)] - [C_{34} \cdot \sin(2\beta) + M_{34} \cdot 2 \cdot L_{34} \cdot a_2 \cdot \sin \beta] \dot{\beta} \cdot \dot{\alpha}$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{M}(A, \overline{E_{234}} \rightarrow E_{234})$$

$$= \vec{z}_1 \cdot \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) + \vec{z}_1 \cdot \vec{M}(A, M_{12} \rightarrow 2) + \vec{z}_1 \cdot \vec{M}(A, \text{frott} \rightarrow 2) + \vec{z}_1 \cdot \vec{M}(A, \text{Charge} \rightarrow E_{34}) + \vec{z}_1 \cdot \vec{M}(A, \text{pes} \rightarrow E_{234})$$

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{M}(A, \overline{E_{234}} \rightarrow E_{234}) = C_{m12} - f_{12} \cdot \dot{\alpha}$$

On déduit l'équation Eq2 :

$$C_{m12} - f_{12} \cdot \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} [J + C_{34} \cdot \cos^2 \beta + M_{34} \cdot (2L_{34} \cdot a_2 \cdot \cos \beta + a_2^2)] - [C_{34} \cdot \sin(2\beta) + M_{34} \cdot 2 \cdot L_{34} \cdot a_2 \cdot \sin \beta] \dot{\beta} \cdot \dot{\alpha}$$

$$C_{m12} = [J + C_{34} \cdot \cos^2 \beta + M_{34} \cdot (2L_{34} \cdot a_2 \cdot \cos \beta + a_2^2)] \ddot{\alpha} + f_{12} \cdot \dot{\alpha} - [C_{34} \cdot \sin(2\beta) + M_{34} \cdot 2 \cdot L_{34} \cdot a_2 \cdot \sin \beta] \dot{\beta} \cdot \dot{\alpha}$$

$$A_2 = [J + C_{34} \cdot \cos^2 \beta + M_{34} \cdot (2L_{34} \cdot a_2 \cdot \cos \beta + a_2^2)] \quad B_2 = f_{12} \quad \mathcal{E}_2 = -[C_{34} \cdot \sin(2\beta) + M_{34} \cdot 2 \cdot L_{34} \cdot a_2 \cdot \sin \beta]$$

D. Etude de la stabilité du robot:

Q30. Déterminer le moment des actions mécaniques extérieures au robot au point

N noté : $\vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \overline{\text{robot}} \rightarrow \text{robot})$.

$$\vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \overline{\text{robot}} \rightarrow \text{robot})$$

$$= \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{sol} \xrightarrow{M} E_1) + \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{sol} \xrightarrow{N} E_1) + \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{pes} \rightarrow E_1) + \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{pes} \rightarrow E_2)$$

$$\bullet \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{sol} \xrightarrow{M} E_1) = \vec{y}_0 \cdot (\overline{NM} \wedge \overline{R_M}) = 2 \cdot a \cdot Z_M$$

$$\bullet \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{sol} \xrightarrow{N} E_1) = 0$$

$$\bullet \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{pes} \rightarrow E_1) = \vec{y}_0 \cdot (\overline{NG_1} \wedge -M_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0) = -a \cdot M_1 \cdot g$$

$$\bullet \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{pes} \rightarrow E_2) = \vec{y}_0 \cdot (\overline{NG_2} \wedge -M_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0) = (b + L) \cdot M_2 \cdot g$$

$$\bullet \vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \text{charge} \rightarrow E_2) = \vec{y}_0 \cdot (\overline{ND} \wedge -F_{\max} \cdot \vec{z}_0) = (b + 2L) \cdot F_{\max}$$

$$\vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \overline{\text{robot}} \rightarrow \text{robot}) = 2 \cdot a \cdot Z_M - a \cdot M_1 \cdot g + (b + L) \cdot M_2 \cdot g + (b + 2L) \cdot F_{\max}$$

Q31. En exprimant la condition de non décollement au point M ($Z_M > 0$), déterminer $L_{\max}$ qui correspond à la longueur de déploiement maximale du manipulateur.

$$\vec{y}_0 \cdot \vec{M}(N, \overline{\text{robot}} \rightarrow \text{robot}) = 0$$

$$2 \cdot a \cdot Z_M = a \cdot M_1 \cdot g - (b + L) \cdot M_2 \cdot g - (b + 2L) \cdot F_{\max}$$

$$Z_M > 0$$

$$L < \frac{(aM_1 - bM_2)g - bF_{\max}}{M_2g + 2F_{\max}}$$

$$L_{\max} = \frac{(aM_1 - bM_2)g - bF_{\max}}{M_2g + 2F_{\max}}$$

E. Dimensionnement des moteurs du robot:

Q32. Donner l'expression de V en fonction de R , k et ω_m .

Q33-a. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du robot dans son mouvement par rapport au sol, $T(\text{Robot}/0)$. En déduire l'expression du moment d'inertie équivalent J_{eq} ramené sur l'arbre moteur en fonction de J_m, J_r, M, R et k tel que :

$$T(\text{Robot}/0) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot J_{\text{eq}}) \cdot \omega_m^2$$

Q33-b. Déterminer l'expression de la puissance intérieure en fonction de C_m, ω_m et le rendement η .

Dimensionnement des moteurs du robot :			
Q32.	$V = R \cdot k \cdot \omega_m$		
Q33.a	$T(\text{Robot}/0) = \frac{1}{2} \cdot (M \cdot V^2 + 2 \cdot J_r \cdot \omega_r^2 + 2 \cdot J_m \cdot \omega_m^2)$		
	$T(\text{Robot}/0) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot J_{\text{eq}}) \cdot \omega_m^2$	$J_{\text{eq}} = \left(\frac{M}{2} \cdot R^2 + J_r \right) \cdot k^2 + J_m$	
Q33.b	$P_{\text{perdue}} = 2 \cdot (\eta - 1) \cdot C_m \cdot \omega_m$	$P_{\text{int}} = 2 \cdot C_m \cdot \omega_m + 2 \cdot (\eta - 1) \cdot C_m \cdot \omega_m$	$P_{\text{int}} = 2 \cdot \eta \cdot C_m \cdot \omega_m$

Q34. Déterminer la puissance des actions mécaniques du sol sur la roue R_{AV} , $P(0 \rightarrow R_{AV}/0)$. En déduire $P(0 \rightarrow R_{AR}/0)$.

Q35. Donner la puissance de l'action mécanique de la pesanteur sur le robot, $P(\text{pes} \rightarrow \text{Robot}/0)$.

Q34.	$P(0 \rightarrow R_{AV}/0) = -\mu \cdot Z_M \cdot \omega_r$	$P(0 \rightarrow R_{AR}/0) = -\mu \cdot Z_N \cdot \omega_r$
Q35.	$P(\text{pes} \rightarrow \text{Robot}/0) = -M \cdot g \cdot V \cdot \sin \psi$	

Q36. Montrer que l'équation obtenue par application du théorème de l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme :

$$J_{\text{eq}} \cdot \frac{d}{dt} \omega_m = A \cdot C_m + B \cdot M \cdot g + C \cdot (Z_M + Z_N)$$

En déduire les expressions de A , B et C en fonction de R , k , η , μ et ψ .

On isole le Robot. On applique le théorème de l'énergie cinétique		
$\frac{d}{dt} T(\text{Robot}/0) = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$	$2.J_{\text{eq}} \cdot \frac{d}{dt} \omega_m = 2.\eta.C_m - M.g.R.k.\sin\psi - \mu.k.(Z_M + Z_N)$	
$J_{\text{eq}} \cdot \frac{d}{dt} \omega_m = \eta.C_m - \frac{1}{2}.M.g.R.k.\sin\psi - \frac{1}{2}.\mu.k.(Z_M + Z_N)$		
$A = \eta$	$B = -\frac{1}{2}R.k.\sin\psi$	$C = -\frac{1}{2}.\mu.k$

Q37. Par application du théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{z}_s$, déterminer l'expression de $Z_M + Z_N$ en fonction de M , g et ψ .

Q38. En déduire l'équation différentielle du mouvement permettant de déterminer le couple moteur C_m .

Q37.	$Z_M + Z_N = M \cdot g \cdot \cos\psi$
Q38.	$J_{\text{eq}} \cdot \frac{d}{dt} \omega_m = \eta \cdot C_m - \frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot (R \cdot \sin\psi + \mu \cdot \cos\psi) \cdot k$ $C_m = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot (R \cdot \sin\psi + \mu \cdot \cos\psi) \cdot k + J_{\text{eq}} \cdot \frac{d}{dt} \omega_m \right)$

F. Comportement en virage:

Q39. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(I_i, 1/0)$ en fonction de ω_1 , v_x , v_y et des données géométriques e_i et a_i .

$$\vec{V}(I_i, 1/0) = \vec{V}(O_1, 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{O_1 I_i} = v_x \cdot \vec{x}_1 + v_y \cdot \vec{y}_1 + \omega_1 \cdot \vec{z}_1 \wedge [-R \cdot \vec{z}_1 + e_i \cdot \vec{x}_1 + a_i \cdot \vec{y}_1]$$

$$\vec{V}(I_i, 1/0) = (v_x - a_i \cdot \omega_1) \cdot \vec{x}_1 + (v_y + e_i \cdot \omega_1) \cdot \vec{y}_1$$

Q40. Exprimer d'autre part ce même vecteur vitesse $\vec{V}(I_i, 1/0)$ en fonction de la vitesse de glissement latérale v_{gl} , de la vitesse de rotation ω_i de la roue i et des données géométriques.

$$\vec{V}(I_i, i/0) = \vec{V}(I_i, i/1) + \vec{V}(I_i, 1/0)$$

$$\text{On a : } \vec{V}(I_i, i/0) = v_{gl} \cdot \vec{y}_1$$

$$\vec{V}(I_i, i/1) = \vec{V}(O_i, i/1) + \vec{\Omega}(i/1) \wedge \overrightarrow{O_i I_i} = \vec{0} + \omega_i \cdot \vec{y}_1 \wedge -R \cdot \vec{z}_1 = -R \cdot \omega_i \cdot \vec{x}_1 ;$$

$$\text{Ce qui donne : } \vec{V}(I_i, 1/0) = R \cdot \omega_i \cdot \vec{x}_1 + v_{gl} \cdot \vec{y}_1$$

Q41. En déduire la vitesse de glissement latérale v_{gi} et de la vitesse de rotation ω_i en fonction de ω_1 , v_x , v_y et des données géométriques.

$$v_{gi} = v_y + e_i \cdot \omega_1 ; \omega_i = \frac{1}{R} (v_x - a_i \cdot \omega_1)$$

G. Stabilité du robot sur sol incliné:

Q42. Par une étude dynamique, déterminer une équation différentielle permettant de déterminer ϕ_{max} . Pour cette étude, il faut préciser :

- Le système isolé.
- Le théorème appliqué.
- Le bilan des actions mécaniques extérieures.
- Toutes les étapes de détermination des quantités dynamiques.
- ...

On isole le Robot. On applique le théorème du moment dynamique au point I_{24} .

$$\vec{M}(I_{24}, \overline{Rb} \rightarrow Rb) = \vec{\delta}(I_{24}, Rb/0)$$

$$1) \vec{M}(I_{24}, \overline{Rb} \rightarrow Rb) = \vec{M}(I_{24}, 0 \rightarrow Rb) + \vec{M}(I_{24}, pes \rightarrow Rb)$$

$$\bullet \vec{M}(I_{24}, 0 \rightarrow Rb) = \overline{I_{24}I_{35}} \wedge \vec{R}(0 \rightarrow Rb) = 2 \cdot L \cdot N_{35} \cdot \vec{x}_{11}$$

$$\bullet \vec{M}(I_{24}, pes \rightarrow Rb) = \overline{I_{24}G} \wedge -M \cdot g \cdot \vec{z}_{10} = (L \cdot \vec{y}_{11} + H \cdot \vec{z}_{11}) \wedge -M \cdot g \cdot (\sin\phi \cdot \vec{y}_{11} + \cos\phi \cdot \vec{z}_{11}) = -M \cdot g \cdot (L \cdot \cos\phi - H \cdot \sin\phi) \cdot \vec{x}_{11}$$

$$\text{Donc : } \vec{M}(I_{24}, \overline{Rb} \rightarrow Rb) = 2 \cdot L \cdot N_{35} \cdot \vec{x}_{11} - M \cdot g \cdot (L \cdot \cos\phi - H \cdot \sin\phi) \cdot \vec{x}_{11}$$

$$2) \vec{\delta}(I_{24}, Rb/0) = \vec{\delta}(G, Rb/0) + \overline{I_{24}G} \wedge M \cdot \vec{a}(G/0)$$

$$\bullet \vec{\sigma}(G, Rb/0) = B \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\phi \cdot \vec{y}_{11} + C \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\phi \cdot \vec{z}_{11} ;$$

$$\text{ona: } \left[\frac{d\vec{z}_{11}}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\theta} \cdot \sin\phi \cdot \vec{x}_{11} ; \left[\frac{d\vec{y}_{11}}{dt} \right]_{R_0} = -\dot{\theta} \cdot \cos\phi \cdot \vec{x}_{11}$$

$$\text{Ce qui donne : } \vec{\delta}(G, Rb/0) = (C - B) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi \cdot \vec{x}_{11}$$

$$\bullet \vec{V}(G/0) = (R_C + H \cdot \sin\phi) \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_{10} \rightarrow \vec{a}(G/0) = (R_C + H \cdot \sin\phi) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_{10}$$

$$M \cdot \vec{a}(G/0) \wedge \overline{I_{24}G} = M \cdot (R_C + H \cdot \sin\phi) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (L \cdot \sin\phi + H \cdot \cos\phi) \cdot \vec{x}_{11}$$

$$\text{Donc : } \vec{\delta}(I_{24}, Rb/0) = ((C - B) \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi - M \cdot (R_C + H \cdot \sin\phi) \cdot (L \cdot \sin\phi + H \cdot \cos\phi)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_{11}$$

TMD en projection sur $\vec{x}_{11}$:

$$2 \cdot L \cdot N_{35} = M \cdot g \cdot (L \cdot \cos\phi - H \cdot \sin\phi) + ((C - B) \cdot \sin\phi \cdot \cos\phi - M \cdot (R_C + H \cdot \sin\phi) \cdot (L \cdot \sin\phi + H \cdot \cos\phi)) \cdot \dot{\theta}^2$$

Risque de renversement du robot pour : $N_{35} = 0$

On aura donc l'équation différentielle permettant de déterminer ϕ_{max} :

$$M \cdot g \cdot (L \cdot \cos\phi_{max} - H \cdot \sin\phi_{max}) + [(C - B) \cdot \sin\phi_{max} \cdot \cos\phi_{max} - M \cdot (R_C + H \cdot \sin\phi_{max}) \cdot (L \cdot \sin\phi_{max} + H \cdot \cos\phi_{max})] \cdot \omega_1^2$$