

CONCOURS NATIONAL COMMUN SESSION : 2023 FILIERES : MP
EPREUVE DE SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGENIEUR
ELEMENTS DE CORRECTION

PARTIE 1- EXERCICE PRELIMINAIRE

Question 1.1. Le système étudié est décrit par trois diagrammes SysML, citer deux autres types de diagrammes SysML utilisés dans l'ingénierie système.

Diagramme de définition des blocs.

Diagramme d'état.

Question 1.2. Parmi les trois diagrammes SysML présentés dans le sujet ; lequel permet-il de décrire le cahier des charges fonctionnelles.

Le diagramme des exigences.

Question 1.3. Quelles sont les exigences nécessaires qui permettront de réaliser l'exigence id.1.3 indiquée sur le diagramme des exigences de l'Annexe 1.

Les exigences id 1.3.1 , id 1.3.2 et id 1.3.3 ,

Question 1.4. (Répondre sur DR2) À partir du schéma Annexe 2, remplir le tableau de DR2 en indiquant pour chaque liaison, le torseur cinématique et d'action mécanique transmissible .

VOIR DR2

Question 1.5. (Répondre sur DR2) donner la liaison cinématiquement équivalente entre la roue (4) et le châssis (0), en indiquant les mouvements possibles.

VOIR DR2

Question 1.6. Donner les vecteurs rotations : $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$ et $\overrightarrow{\Omega(2/0)}$.

$$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0$$

Question 1.7. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(A/0)}$.

$$\overrightarrow{V(A/0)} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0$$

Question 1.8. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(B/0)}$ par dérivation.

$$\overrightarrow{V(B/0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right)_{R_0} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2$$

Question 1.9. Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V(B/0)}$ par la relation des champs de moments.

$$\overrightarrow{V(B \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 2/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(2/0)} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 - L \cdot \vec{x}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2$$

Question 1.10. Ecrire les torseurs cinématiques : $\{\vartheta(1/0)\}_A$ et $\{\vartheta(2/0)\}_B$.

$$\vartheta(1/0) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(1/0)} \\ \overrightarrow{V(A \in 1/0)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x} \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \vartheta(2/0) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(2/0)} \\ \overrightarrow{V(B \in 1/0)} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 \\ \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2 \end{array} \right\}_B$$

Inertie de la roue :

Question 1.11. Déterminer la masse surfacique notée (λ) du matériau de S en fonction de : m , R_e , R_i , r et h .

$$\text{Masse surfacique : } \lambda = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi(R_e^2 - R_i^2) - 4\pi r^2}$$

Question 1.12. Déduire m_1 , m_2 et m_3 : les masses des disques S_1 , S_2 et S_3 respectivement, en fonction de m , R_e , R_i et r .

$$\text{On a : } \frac{m}{\pi(R_e^2 - R_i^2) - 4\pi r^2} = \frac{m_1}{\pi R_e^2} = \frac{m_2}{\pi R_i^2} = \frac{m_3}{\pi r^2}$$

$$m_1 = m \cdot \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2 - 4r^2} \quad , \quad m_2 = m \cdot \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2 - 4r^2} \quad , \quad m_3 = m \cdot \frac{r^2}{R_e^2 - R_i^2 - 4r^2}$$

Question 1.13. Donner l'expression de I_{2z} ; le moment d'inertie de S_2 par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$.
(On donne $I_{1z} = m_1 \cdot \frac{R_e^2}{2}$ le moment d'inertie de S_1 par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$).

$$I_{2z} = m_2 \cdot \frac{R_i^2}{2}$$

Question 1.14. Déterminer I_{3z} ; le moment d'inertie de S_3 par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$ en utilisant le théorème de Huygens.

$$\text{Théorème de Huygens : } I_{3z} = m_3 \frac{r^2}{2} + m_3 (4r)^2 = \frac{33}{2} m_3 r^2$$

Question 1.15. Déterminer I_z : moment d'inertie de S par rapport à l'axe $(C, \vec{z})$ en fonction de m , R_e , R_i et en vous aidant de la relation : $I_z = I_{1z} - I_{2z} - 4 \cdot I_{3z}$.

$$I_z = I_{1z} - I_{2z} - I_{3z} + I_{4z} + I_{5z} + I_{6z} = I_{1z} - I_{2z} - 4 \cdot I_{3z}$$

$$I_z = m_1 \frac{R_e^2}{2} - m_2 \frac{R_i^2}{2} - 4 \cdot \left(\frac{33}{2} m_3 r^2 \right)$$

$$I_z = \frac{m_1 R_e^2 - m_2 R_i^2}{2} - 66 m_3 r^2 \Rightarrow I_z = \frac{m}{R_e^2 - R_i^2 - 4r^2} \left(\frac{R_e^4 - R_i^4}{2} - 66 r^2 \right)$$

Fin de la partie préliminaire.

PARTIE 2: ANALYSE DU COMPORTEMENT EN BRAQUAGE:

Question 2.1. Sur DR1, et à partir du diagramme « ibd » du document Annexe 2, compléter les chaînes fonctionnelles d'informations et de puissance du système 4Control décrit.

VOIR DR1

Question 2.2. La solution présentée sur le schéma cinématique de l'Annexe 2 permet-elle de réaliser les trois fonctionnalités décrite par les figures 1a, 1b et 1c.

Elle permet de réaliser les fonctionnalités des figures (1a) et (1b) mais elle ne permet pas de réaliser celle de (1c) car on aura besoin d'orienter les roues séparément avec deux actionneurs indépendants.

Question 2.3. Le constructeur indique que les roues avant et arrière doivent :

- braquer dans des sens opposés pour des vitesses du véhicule inférieures à 60 km/h
- braquer dans le même sens pour des vitesses du véhicule supérieures à 60 Km/h.

Sur le document réponse DR2 est représentée la courbe de vitesse d'un véhicule dans un virage en fonction du temps et le sens de braquage des roues avant.

Compléter sur DR2 le chronogramme des sens de braquage des roues arrière du véhicule considéré.

VOIR DR2

PARTIE 3 : CHOIX DE L'ACTIONNEUR :

Question 3.1. En utilisant la fermeture géométrique, déterminer les deux relations liant les trois paramètres du système α, β et x . (projeter sur la base fixe)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} & \Rightarrow & & x\vec{x}_0 + a\vec{x}_2 - b\vec{y}_3 &= e\vec{x}_0 \\ & & \Rightarrow & & \boxed{\begin{aligned} x + a\cos\alpha + b\sin\beta &= e \\ a\sin\alpha - b\cos\beta &= 0 \end{aligned}} \end{aligned}$$

Question 3.2. En déduire l'expression de α en fonction de β , et l'expression de x en fonction de β .

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \arcsin\left(\frac{b}{a} \cdot \cos\beta\right) \\ x &= e - b\sin\beta - a\cos\left(\arcsin\left(\frac{b}{a} \cdot \cos\beta\right)\right) \end{aligned}}$$

Question 3.3. Déterminer $T(2/R_0)$; l'Energie cinétique galiléenne de la biellette (2).

$$T(2/R_0) = \frac{1}{2} V(2/0)_G C(2/0)_G = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\vec{\Omega}(2/0)}{V(G_2, 2/0)} \right\}_G \left\{ \frac{m_2 \cdot \overrightarrow{V(G_2, 2/0)}}{\sigma(G_2, 2/0)} \right\}_G$$

$$\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{V(G_2, 2/0)} = \overrightarrow{V(A, 2/0)} + \overrightarrow{G_2 A} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 - \frac{a}{2} \cdot \vec{x}_2 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + \frac{a}{2} \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{\sigma(G_2, 2/0)} \cdot \vec{\Omega}(2/0) = J_2 \cdot \dot{\alpha}^2$$

$$\Rightarrow T(2/R_0) = \frac{1}{2} J_2 \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}^2 + \frac{a^2 \cdot \dot{\alpha}^2}{4} - a \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{x} \sin \alpha \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(2/R_0) = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(J_2 + m_2 \frac{a^2}{4} \right) \cdot \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_2 \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{x} \sin \alpha}$$

Question 3.4. Déterminer $T(E/R_0)$: l'Energie cinétique galiléenne du système ($E=(1, 2, 3)$).

$$T(E/R_0) = T(1/R_0) + T(2/R_0) + T(3/R_0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + T(2/R_0) + \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T(E/R_0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(J_2 + m_2 \frac{a^2}{4} \right) \cdot \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_2 \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{x} \sin \alpha + \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}^2}$$

Question 3.5. Déterminer $P(\bar{E} \rightarrow E/R_0)$: les puissances des actions mécaniques extérieures de l'ensemble (E) par rapport au repère R_0 .

$$P(\bar{E} \rightarrow E/R_0) = P(0 \xrightarrow{\text{Liaison}} 1/R_0) + P(0 \xrightarrow{\text{Liaison}} 3/R_0) + P(0 \xrightarrow{V_{01}} 1/R_0) + P(0 \xrightarrow{\text{Ressort}} 3/R_0)$$

$$+ P(0 \xrightarrow{\mu} 3/R_0) + P(\text{pes} \rightarrow 1/R_0) + P(\text{pes} \rightarrow 2/R_0) + P(\text{pes} \rightarrow 3/R_0)$$

$$= 0 + 0 + F \cdot \dot{x} - k \cdot \beta \cdot \dot{\beta} - \mu \cdot \dot{\beta}^2 + 0 + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\bar{E} \rightarrow E/R_0) = F \cdot \dot{x} - k \cdot \beta \cdot \dot{\beta} - \mu \cdot \dot{\beta}^2}$$

Question 3.6. Déterminer $P(\text{int } E)$: les puissances des actions mécaniques intérieures à (E).

$$\boxed{P(\text{int } E) = P(1 \xleftarrow{LP} 2) + P(2 \xleftarrow{LP} 3) = 0 + 0 = 0}$$

Question 3.7. Par application du théorème de l'énergie cinétique au système (E), donner l'expression de l'effort F du vérin en fonction des données.

$$\frac{d}{dt} T(E/R_0) = P(\bar{E} \rightarrow E/R_0) + P(\text{int } E)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(J_2 + m_2 \frac{a^2}{4} \right) \cdot \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_2 \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{x} \sin \alpha + \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}^2 \right) = F \cdot \dot{x} - k \cdot \beta \cdot \dot{\beta} - \mu \cdot \dot{\beta}^2$$

$$\text{D'où : } F = \frac{1}{\dot{x}} \cdot \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(J_2 + m_2 \frac{a^2}{4} \right) \cdot \dot{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m_2 \cdot a \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{x} \sin \alpha + \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}^2 \right) + k \cdot \beta \cdot \dot{\beta} + \mu \cdot \dot{\beta}^2 \right]$$

PARTIE 4 : INFLUENCE DU MOUVEMENT DES ROUES.

Question 4.1. Déterminer l'expression de la vitesse $\overrightarrow{V(D/R_0)}$ du point D par rapport au repère R_0 .

$$\overrightarrow{V(D/R_0)} = \left(\frac{d\overrightarrow{OD}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d(d.\vec{x}_1 + b.\vec{x}_2)}{dt} \right)_{R_0} = d.\dot{\psi}.\vec{y}_1 + b(\dot{\psi} + \dot{\beta}).\vec{y}_2$$

Question 4.2. Déterminer l'expression de l'accélération $\overrightarrow{\Gamma(D/R_0)}$ du point D par rapport à R_0 .

$$\overrightarrow{\Gamma(D/R_0)} = \overrightarrow{V(D/R_0)} = d.\ddot{\psi}.\vec{y}_1 - d.\dot{\psi}^2.\vec{x}_1 + b(\ddot{\psi} + \ddot{\beta}).\vec{y}_2 - b(\dot{\psi} + \dot{\beta})^2.\vec{x}_2$$

Question 4.3. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\sigma(A,3/R_0)}$ du solide (3) par rapport à R_0 .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma(A,3/R_0)} &= \overrightarrow{\sigma(D,3/R_0)} + \overrightarrow{AD} \wedge m_3.\overrightarrow{V(D/R_0)} = \overrightarrow{I_{(D,3)}}.\overrightarrow{\Omega(3/R_0)} + m_3.b.\vec{x}_2 \wedge \overrightarrow{V(D/R_0)} \\ \overrightarrow{\Omega(3/R_0)} &= (\dot{\psi} + \dot{\beta}).\vec{z}_0 + \dot{\theta}.\vec{x}_2 \\ \overrightarrow{\sigma(A,3/R_0)} &= \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\beta} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)} + m_3.b.\vec{x}_2 \wedge d.\dot{\psi}.\vec{y}_1 + b(\dot{\psi} + \dot{\beta}).\vec{y}_2 \\ &= A_3.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + C_3(\dot{\psi} + \dot{\beta}).\vec{z}_0 + m_3.b.d.\dot{\psi}.\cos\beta.\vec{z}_0 + m_3.b^2.(\dot{\psi} + \dot{\beta}).\vec{z}_0 \\ \boxed{\overrightarrow{\sigma(A,3/R_0)} &= A_3.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + \left[C_3 + m_3.b^2 (\dot{\psi} + \dot{\beta}) + m_3.b.d.\dot{\psi}.\cos\beta \right] \vec{z}_0} \end{aligned}$$

Question 4.4. Déterminer $\vec{y}_2.\overrightarrow{\delta(A,\Sigma_1/R_0)}$ de l'ensemble $\Sigma_1 = (2, 3)$ par rapport à R_0 .

$$\begin{aligned} \vec{y}_2.\overrightarrow{\delta(A,\Sigma_1/R_0)} &= \vec{y}_2.\overrightarrow{\delta(A,2/R_0)} + \vec{y}_2.\overrightarrow{\delta(A,3/R_0)} = \vec{y}_2.\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma(A,3/R_0)}}{dt} \right)_{R_0} + m_3.\vec{y}_2.\left(\overrightarrow{V(A/R_0)} \wedge \overrightarrow{V(D/R_0)} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \vec{y}_2.\left(\overrightarrow{\sigma(A,3/R_0)} \right) \sigma(A,3/R_0).\left(\frac{d\vec{y}_2}{dt} \right)_{R_0} + m_3.d.\dot{\psi}.\overrightarrow{V(D/R_0)}.\left(\vec{e}_2 \wedge \vec{y}_1 \right) \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{\sigma(A,3/R_0)}.\dot{\psi}.\vec{x}_2 - m_3.d.\dot{\psi}.\sin\beta.\vec{z}_0.\overrightarrow{V(D/R_0)} \\ \boxed{\vec{y}_2.\overrightarrow{\delta(A,\Sigma_1/R_0)} &= A_3.(\dot{\psi} + \dot{\beta}).\dot{\theta}} \end{aligned}$$

Question 4.5. Isoler L'ensemble $\Sigma = (1, 2, 3)$ et écrire le théorème du moment dynamique TMD en O en projection sur $\vec{z}_0$. (seuls les termes des actions mécaniques seront développés).

$$\vec{z}_0.\overrightarrow{\delta(O,\Sigma/R_0)} = \vec{z}_0.\overrightarrow{M_O(\Sigma \rightarrow \Sigma)} = C_{01} - \vec{z}_0.\overrightarrow{OG_i} \wedge m_i.g.\vec{z}_0 = C_{01}$$

$$\boxed{C_{01} = \vec{z}_0.\overrightarrow{\delta(O,\Sigma/R_0)}}$$

Question 4.6. Isoler L'ensemble $\Sigma_1 = (2, 3)$ et écrire l'équation du TMD au point A en projection sur $\vec{z}_0$. (seuls les termes des actions mécaniques seront développés).

$$\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(A, \Sigma_1 / R_0)} = \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1)} = C_{12} - \mu \cdot \dot{\beta} - k \cdot \beta + \vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{AG_i} \wedge \vec{m_i} \cdot g \cdot \vec{z}_0$$

$$\boxed{\vec{z}_0 \cdot \overrightarrow{\delta(A, \Sigma_1 / R_0)} = C_{12} - \mu \cdot \dot{\beta} - k \cdot \beta}$$

Question 4.7. Isoler L'ensemble $\Sigma_1 = (2, 3)$ et écrire l'équation du TMD en A en projection sur $\vec{y}_2$, en déduire l'expression de M_{12} : la composante sur $\vec{y}_2$ du moment de l'A.M. de la liaison (1) et (2).

$$\vec{y}_2 \cdot \overrightarrow{\delta(A, \Sigma_1 / R_0)} = \vec{y}_2 \cdot \overrightarrow{M_A(\bar{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1)} = M_{12} - \vec{y}_2 \cdot \overrightarrow{AD} \wedge \vec{m_3} \cdot g \cdot \vec{z}_0 = M_{12} - \vec{y}_2 \cdot b \cdot \vec{x}_2 \wedge \vec{m_3} \cdot g \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{y}_2 \cdot \overrightarrow{\delta(A, \Sigma_1 / R_0)} = M_{12} + m_3 \cdot b \cdot g$$

$$M_{12} = \vec{y}_2 \cdot \overrightarrow{\delta(A, \Sigma_1 / R_0)} - m_3 \cdot b \cdot g \Rightarrow \boxed{M_{12} = A_3 \cdot \dot{\theta} \cdot (\dot{\psi} + \dot{\beta}) - m_3 \cdot b \cdot g}$$

Question 4.8. Quel est l'effet que produit la variation de $\dot{\beta}$ (vitesse de braquage) sur le véhicule, puis donner l'expression de $\dot{\beta}$ qui permet d'annuler le moment M_{12} .

Variation de $\dot{\beta} \Rightarrow$ variation de $M_{12} \Rightarrow$ vibrations au niveau de la liaison L_{12} .

$$M_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\beta} = \frac{m_3 \cdot b \cdot g}{A_3 \cdot \dot{\theta}} - \dot{\psi}}$$

PARTIE 5 : VERIN ELECTRIQUE.

Question 5.1. Donner la relation entre $\dot{x}$ et ω_3 .

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{q}{2\pi} \omega_3}$$

Question 5.2. En utilisation la contrainte de montage du réducteur épicycloïdale, déterminer Z_{22} en fonction de Z_1, Z_{21} et Z_0 .

$$R_0 = R_1 + R_{21} + R_{22} \Rightarrow Z_0 = Z_1 + Z_{21} + Z_{22}$$

$$\boxed{Z_{22} = Z_0 - Z_1 - Z_{21}}$$

Question 5.3. Par application de la formule de Willis, déterminer le rapport : $k_1 = \frac{\omega_3}{\omega_1}$.

On se place sur le porte satellite : $\frac{\omega_{0/3}}{\omega_{1/3}} = -\frac{Z_1 \cdot Z_{22}}{Z_{21} \cdot Z_0}$

$$-\omega_0 - \omega_3 \cdot Z_{21} \cdot Z_0 = \omega_1 - \omega_3 \cdot Z_1 \cdot Z_{22} \Rightarrow \omega_3 \cdot Z_{21} \cdot Z_0 + Z_1 \cdot Z_{22} = \omega_1 \cdot Z_1 \cdot Z_{22}$$

$$\boxed{k_1 = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{Z_1 \cdot Z_{22}}{Z_{21} \cdot Z_0 + Z_1 \cdot Z_{22}}}$$

Question 5.4. Dédurre de ce qui précède le rapport : $k = \frac{\omega_m}{\dot{x}}$.

$$k = \frac{\omega_m}{\dot{x}} = \frac{\omega_m}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\dot{x}} = \frac{-2\pi \frac{Z_{21} \cdot Z_0 + Z_1 \cdot Z_{22}}{q \cdot Z_1 \cdot Z_{22}}}{q \cdot k_1} = \frac{-2\pi}{q \cdot k_1}$$

Question 5.5. Déterminer l'énergie cinétique galiléenne $T(E/0)$ de l'ensemble E constitué des pièces (1,2,3,4). En déduire le moment d'inertie équivalent J_e de l'ensemble E ramené sur l'axe moteur.

$$\begin{aligned} T(E/R_0) &= T(1/R_0) + T(2/R_0) + T(3/R_0) + T(4/R_0) \\ &= \frac{1}{2} J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_3 \cdot \omega_3^2 + \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} J_m \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_3 \cdot k_1^2 \cdot \omega_m^2 + \frac{m}{2 \cdot k^2} \cdot \omega_m^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(J_m + J_2 + J_3 \cdot k_1^2 + \frac{m}{k^2} \right) \cdot \omega_m^2 \end{aligned}$$

$$J_e = J_m + J_2 + J_3 \cdot k_1^2 + \frac{m}{k^2}$$

Question 5.6. Déterminer l'expression de la puissance perdue dans la transmission, en fonction C_m , ω_m et η .

$$P_{\text{perdue}} = P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}} = C_m \cdot \omega_m - \eta \cdot C_m \cdot \omega_m = C_m \cdot \omega_m (1 - \eta)$$

Question 5.7. Ecrire le TEC appliqué à E , (on donne les puissances intérieures $P_{\text{int}} = C_m \cdot \omega_m (\eta - 1)$). En déduire l'expression du couple moteur C_m en fonction de : η , J_e , $\dot{\omega}_m$, F et k .

$$\frac{dT(E/R_0)}{dt} = C_m \cdot \omega_m - F \cdot \dot{x} - C_m \cdot \omega_m (1 - \eta) = -F \cdot \dot{x} + \eta \cdot C_m \cdot \omega_m$$

$$J_e \cdot \dot{\omega}_m \cdot \omega_m = \eta \cdot C_m \cdot \omega_m - F \cdot \dot{x} = \eta \cdot C_m \cdot \omega_m - F \cdot \frac{\omega_m}{k}$$

$$\Rightarrow J_e \cdot \dot{\omega}_m = \eta \cdot C_m - \frac{F}{k} \quad \Rightarrow \quad C_m = \frac{1}{\eta} \left(\frac{F}{k} + J_e \cdot \dot{\omega}_m \right)$$

PARTIE 6: ASSERVISSEMENT DE L'ANGLE DE BRACAGE :

Question 6.1. Proposer deux types de capteurs de position pour la chaîne de retour.

Capteur potentiométrique.

Codeur incrémental.

Question 6.2. Donner les fonctions de transferts $A_1(p)$, $A_2(p)$ et $A_3(p)$ indiquées sur la figure 10.

$$A_1(p) = q.n \quad , \quad A_2(p) = 1/p \quad , \quad A_3(p) = 1/a$$

Question 6.3. Déterminer K_a pour avoir un écart nul lorsque la réponse atteint la consigne.

$$K_a = K_{\text{capt}}$$

Modélisation du moteur à courant continu :

Question 6.4. Ecrire les équations du moteur dans le domaine de Laplace, en considérant les conditions initiales nulles, puis donner les fonctions de transfert $B_1(p)$, $B_2(p)$, $B_3(p)$ et $B_4(p)$.

$$\left. \begin{aligned} U(p) &= E(p) + R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) \\ C_m(p) &= k_i \cdot I(p) \\ E(p) &= k_e \cdot \Omega_m(p) \\ C_m(p) - C_r(p) &= J_e \cdot p \cdot \Omega_m(p) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} B_1(p) &= \frac{1}{R + L \cdot p} \\ B_2(p) &= k_i \\ B_3(p) &= \frac{1}{J_e \cdot p} \\ B_4(p) &= k_e \end{aligned}$$

Question 6.5. On pose $\Omega_m(p) = H_u(p) \cdot U(p) - H_c(p) \cdot C_r(p)$, déterminer les expressions des fonctions de transferts $H_u(p)$ et $H_c(p)$ en fonction de $B_1(p)$, $B_2(p)$, $B_3(p)$ et $B_4(p)$.

$$\Omega_m(p) = H_u(p) \cdot U(p) - H_c(p) \cdot C_r(p)$$

$$H_u(p) = \frac{B_1(p) \cdot B_2(p) \cdot B_3(p)}{1 + B_1(p) \cdot B_2(p) \cdot B_3(p) \cdot B_4(p)} \quad \text{et} \quad H_c(p) = \frac{B_3(p)}{1 + B_1(p) \cdot B_2(p) \cdot B_3(p) \cdot B_4(p)}$$

Question 6.6. Ecrire les expressions de $H_u(p)$ et $H_c(p)$ en fonction des données du moteur, puis les mettre sous formes canoniques en indiquant, pour chacune d'elle, l'ordre, la classe et le gain statique.

$$\bullet H_u(p) = \frac{\frac{k_i}{J_e} \cdot \frac{1}{p \cdot R + L \cdot p}}{1 + \frac{k_i k_e}{J_e} \cdot \frac{1}{p \cdot R + L \cdot p}} = \frac{k_i}{J_e \cdot p \cdot R + L \cdot p + k_i k_e} = \frac{\left(\frac{1}{k_e} \right)}{1 + \left(\frac{J_e \cdot R}{k_i k_e} \right) \cdot p + \left(\frac{J_e \cdot L}{k_i k_e} \right) \cdot p^2}$$

$$\bullet H_c(p) = \frac{\frac{1}{J_e p}}{1 + \frac{k_i k_e}{J_e} \cdot \frac{1}{p \cdot R + L \cdot p}} = \frac{R + L \cdot p}{J_e \cdot p \cdot R + L \cdot p + k_i k_e} = \left(\frac{R}{k_i k_e} \right) \cdot \frac{1 + \left(\frac{L}{R} \right) \cdot p}{1 + \left(\frac{J_e \cdot R}{k_i k_e} \right) \cdot p + \left(\frac{J_e \cdot L}{k_i k_e} \right) \cdot p^2}$$

$$H_u(p) = \frac{\left(\frac{1}{k_e} \right)}{1 + \left(\frac{J_e \cdot R}{k_i k_e} \right) \cdot p + \left(\frac{J_e \cdot L}{k_i k_e} \right) \cdot p^2}$$

Ordre : 2
Classe : 0
gain statique : $\frac{1}{k_e}$

$$H_c(p) = \left(\frac{R}{k_i k_e} \right) \cdot \frac{1 + \left(\frac{L}{R} \right) \cdot p}{1 + \left(\frac{J_e \cdot R}{k_i k_e} \right) \cdot p + \left(\frac{J_e \cdot L}{k_i k_e} \right) \cdot p^2}$$

Ordre : 2
Classe : 0
gain statique : $\frac{R}{k_i k_e}$

Question 6.7. la figure 12 donne la réponse indicielle à un échelon $u(t)=12v$ de $H_u(p)$ en considérant $C_r(t)=0$. Commenter cette courbe en posant une hypothèse permettant d'identifier $H_u(p)$ en une fonction de premier ordre, puis en déduire son gain statique et sa constante de temps.

Présence d'un pôle dominant, on néglige la constante de temps la plus faible et le système

peut être assimilée à un premier ordre : $H_u(p) = \frac{K}{1 + T \cdot p}$

Courbe figure 12 : Gain statique $K = 73,26$ et la constante de temps $T = 0,04$ s

On considère un correcteur proportionnel $C(p)=K_p$

Question 6.8. En posant $\beta(p)=H_1(p) \cdot \beta_c(p) - H_2(p) \cdot C_r(p)$, écrire, en fonction de K_p , les expressions de $H_1(p)$ et $H_2(p)$ puis les mettre sous formes canoniques et donner pour H_1 : ω_n et z en fonction de K_p .

$$\beta(p) = H_1(p) \cdot \beta_c(p) - H_2(p) \cdot C_r(p)$$

$$\bullet H_1(p) = \frac{\frac{A \cdot K_m \cdot K_p}{p(1 + T_m \cdot p)}}{1 + \frac{A \cdot K_m \cdot K_p}{p(1 + T_m \cdot p)}} = \frac{A \cdot K_m \cdot K_p}{A \cdot K_m \cdot K_p + p + T_m \cdot p^2} = \frac{1}{1 + \frac{p}{A \cdot K_m \cdot K_p} + \frac{T_m}{A \cdot K_m \cdot K_p} \cdot p^2} = \frac{1}{1 + \frac{0,25}{K_p} \cdot p + \frac{0,01}{K_p} \cdot p^2}$$

$$\bullet H_2(p) = \frac{\frac{K_m}{p(1 + T_m \cdot p)}}{1 + \frac{A \cdot K_m \cdot K_p}{p(1 + T_m \cdot p)}} = \frac{K_m}{A \cdot K_m \cdot K_p + p + T_m \cdot p^2} = \frac{1/A \cdot K_p}{1 + \frac{p}{A \cdot K_m \cdot K_p} + \frac{T_m}{A \cdot K_m \cdot K_p} \cdot p^2} = \frac{0,05/K_p}{1 + \frac{0,25}{K_p} \cdot p + \frac{0,01}{K_p} \cdot p^2}$$

$$\text{D'où} \quad \omega_n = 10 \sqrt{K_p} \quad \text{et} \quad z = \frac{1,25}{\sqrt{K_p}}$$

Question 6.9. Donner sans calcul l'écart statique du à la consigne $\beta_c(t)$ pour une entrée échelon de valeur β_0 en justifiant votre réponse.

L'écart statique de l'entrée est nul car on a un intégrateur dans la boucle ouverte.

Question 6.10. Déterminer l'expression (en fonction de K_p) de l'écart en régime permanent ε_∞ pour $\beta_c(t) = \beta_0$ et $Cr(t) = C_0$ (β_0 et C_0 sont des constantes).

$$\varepsilon(p) = \beta_c(p) - \beta(p) = \beta_c(p) - H_1(p) \cdot \beta_c(p) - H_2(p) \cdot C_r(p) \\ = \beta_c(p) (1 - H_1(p)) + H_2(p) \cdot C_r(p)$$

$$\varepsilon_{\text{entrée}}(p) = \beta_c(p) (1 - H_1(p)) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\text{perturbation}}(p) = H_2(p) \cdot C_r(p)$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{\beta_0}{p} (1 - H_1(p)) + H_2(p) \cdot \frac{C_0}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\beta_0 (1 - H_1(p)) + C_0 \cdot H_2(p) \right)$$

$$\boxed{\varepsilon_\infty = \frac{C_0}{20 \cdot K_p}}$$

Question 6.11. En posant $Cr(t) = 0$, déterminer la valeur de K_p pour avoir une réponse la plus rapide à une entrée échelon de consigne $\beta_c(t) = \beta_0$. En déduire $t_{5\%}$ le temps de réponse à 5%. ($\omega_n \cdot t_{5\%} = 3$).

$$\text{Deuxième ordre le plus rapide pour } z = 0,7 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$z = \frac{1,25}{\sqrt{K_p}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2,5 = \sqrt{2K_p} \Rightarrow K_p = \frac{2,5^2}{2} \Rightarrow K_p = 3,125$$

$$\omega_n \cdot t_{5\%} = 3 \Rightarrow t_{5\%} = \frac{3}{\omega_n} = \frac{3}{10\sqrt{K_p}} = \frac{3}{10\sqrt{3,125}} = 0,17s$$

Question 6.12. Donner la FTBO = $G_1(p)$ en laissant apparaitre K_p .

$$\boxed{\text{FTBO} = G_1(p) = \frac{A \cdot K_p \cdot K_m}{p (1 + T_m \cdot p)} = \frac{4 \cdot K_p}{p (1 + 0,04 \cdot p)}}$$

Question 6.13. Relever sur les diagrammes (figure 14), la marge de phase et la marge de gain et déterminer graphiquement K_{p60} de K_p qui permet d'avoir une marge de phase de 60 degré.

$$MP = 80^\circ$$

$$MG = \text{infini}$$

$$20 \log K_{p60} = 12 \Rightarrow K_{p60} = 10^{\frac{12}{20}} = 3,98 \Rightarrow \boxed{K_{p60} = 3,98}$$

Question 6.14. La correction proportionnelle permet-elle de satisfaire le cahier des charges.

Non car l'écart statique n'est pas nul (présence d'écart dû à la perturbation).

On considère maintenant le correcteur proportionnel intégral $C(p) = K_c \frac{1 + T_c \cdot p}{T_c \cdot p}$

Question 6.15. Donner $G_2(p)$: la fonction de transfert en boucle ouverte du système de la figure 15, en laissant apparaître K_c .

$$G_2(p) = \frac{4 \cdot K_c}{T_c} \cdot \frac{1 + T_c \cdot p}{p^2 (1 + T_m \cdot p)} = 7,14 \cdot K_c \frac{1 + 0,56 \cdot p}{p^2 (1 + 0,04 \cdot p)} \Rightarrow \boxed{G_2(p) = 7,14 \cdot K_c \frac{1 + 0,56 \cdot p}{p^2 (1 + 0,04 \cdot p)}}$$

Question 6.16. Donner (ε_∞) l'écart en régime permanent en justifiant votre réponse (avec $\beta_c(t) = \beta_0$ et $Cr(t) = C_0$, β_0 et C_0 : des constantes).

L'écart statique total est nul (présence d'intégrateur en amont de la perturbation)

Question 6.17. Tracer sur le document réponse DR3, les diagrammes asymptotiques de Bode de $G_2(p)$ pour $K_c = 1$, tracer ensuite les allures des courbes réelles.

VOIR DR3 : Tracé de $G_2(p) = 7,14 \cdot K_c \frac{1 + 0,56 \cdot p}{p^2 (1 + 0,04 \cdot p)}$

Question 6.18. Déterminer K_{c60} : la plus grande valeur de K_c qui permet d'avoir une marge de phase égale à 60 degré.

$$G_2(j\omega) = 7,14 \cdot K_c \cdot \frac{1 + 0,56 \cdot j\omega}{- \omega^2 (1 + 0,04 \cdot j\omega)} \Rightarrow |G_2(j\omega)| = 7,14 \cdot K_c \cdot \frac{\sqrt{1 + (0,56 \cdot \omega)^2}}{- \omega^2 \sqrt{1 + (0,04 \cdot \omega)^2}}$$

$$\text{et } \arg G_2(j\omega) = \text{artg}(0,56 \cdot \omega) - 180^\circ - \text{artg}(0,04 \cdot \omega)$$

$$MP = 60^\circ \Rightarrow 180^\circ + \arg G_2(j\omega_c) = 60^\circ \Rightarrow \arg G_2(j\omega_c) = -120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{artg}(0,56 \cdot \omega_c) - 180^\circ - \text{artg}(0,04 \cdot \omega_c) = -120^\circ \Rightarrow \text{artg}(0,56 \cdot \omega_c) - \text{artg}(0,04 \cdot \omega_c) = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{(0,56 - 0,04) \cdot \omega_c}{1 - 0,56 \times 0,04 \cdot \omega_c^2} = \sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} \rightarrow \omega_c = 7,217 \text{ rd/s} \\ \rightarrow \omega_c = 6,185 \text{ rd/s} \end{cases}$$

$$\boxed{\omega_c = 7,217 \text{ rd/s}} \text{ et } |G_2(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow 7,14 \cdot K_c \cdot \frac{\sqrt{1 + (0,56 \cdot \omega_c)^2}}{\omega_c^2 \sqrt{1 + (0,04 \cdot \omega_c)^2}} = 1 \Rightarrow \boxed{K_c = 0,6}$$

Question 6.19. On donne figure 16 ; la réponse indicielle avec la valeur de K_c déterminée à la question précédente. En déduire $t_{5\%}$ et $d\%$: le temps de réponse à 5 % et le dépassement en %.

Temps de réponse : $t_{5\%} = 0,35 \text{ s}$

$$\text{Dépassement : } d\% = \frac{0,04}{0,1} \times 100 = 4\%$$

Question 6.20. Ce réglage du correcteur respecte-il le cahier des charges ?

Le cahier des charges n'est pas respecté car : $t_{5\%} = 0,35s > 0,2s$ et $d\% = 4\% > 3\%$.

On pose maintenant : $C(p) = K_c \frac{1+T_c \cdot p}{T_c \cdot p}$ avec $T_c = 7.8s$ et $K_c = 2,6$

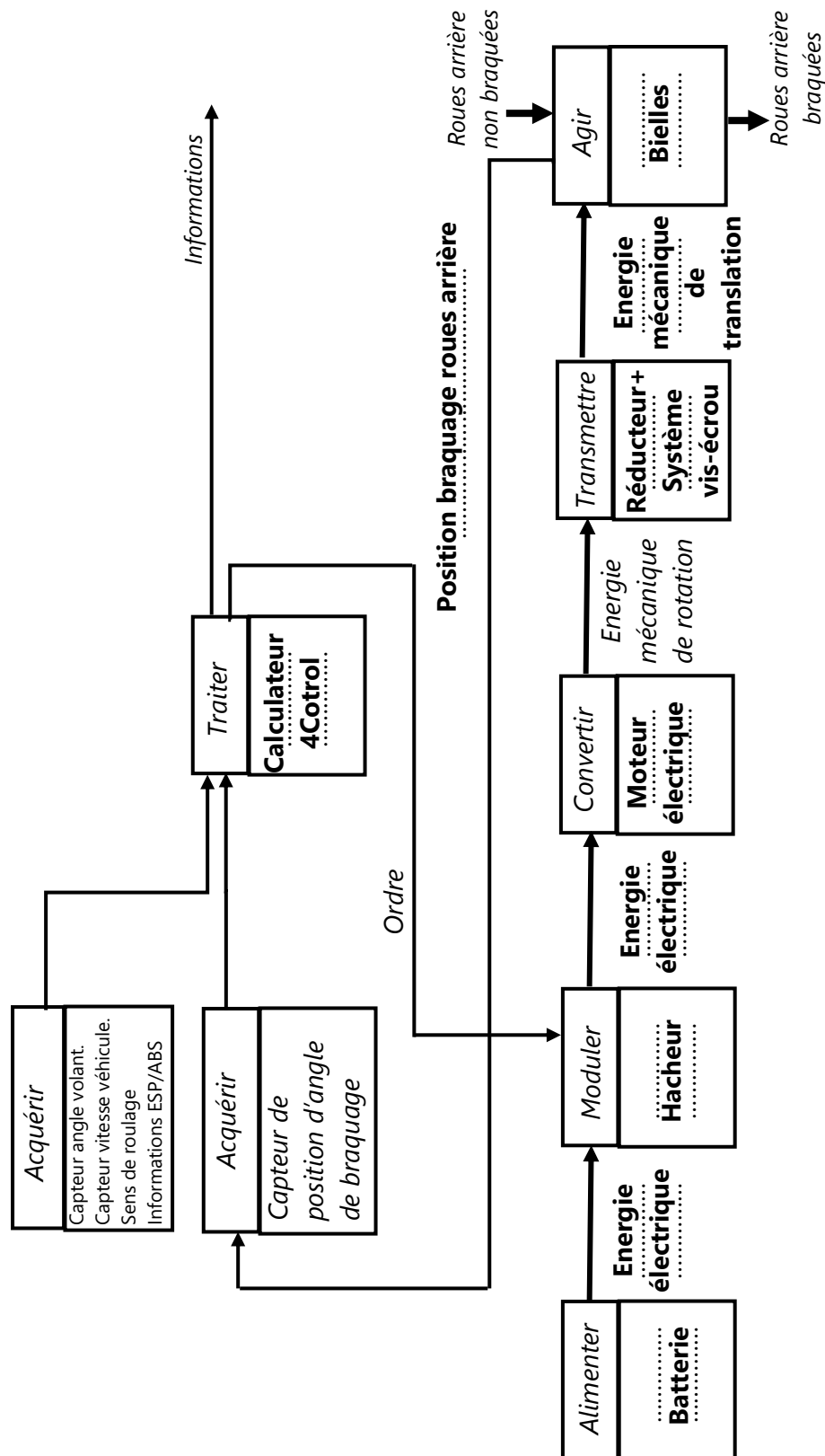
Question 6.21. Sur le document réponse DR4 :

- Donner le temps de réponse à 5% du système corrigé.
- Donner la valeur maximale du dépassement en %.
- Déterminer la marge de phase en faisant apparaître son tracé sur la courbe.
- Donner l'écart en régime permanent.
- Conclure quand au respect du cahier des charges.

VOIR DR4

DOCUMENT REPONSE DR1

Question 2.1 :



DOCUMENT REPONSE DR2

Question 1.4 :

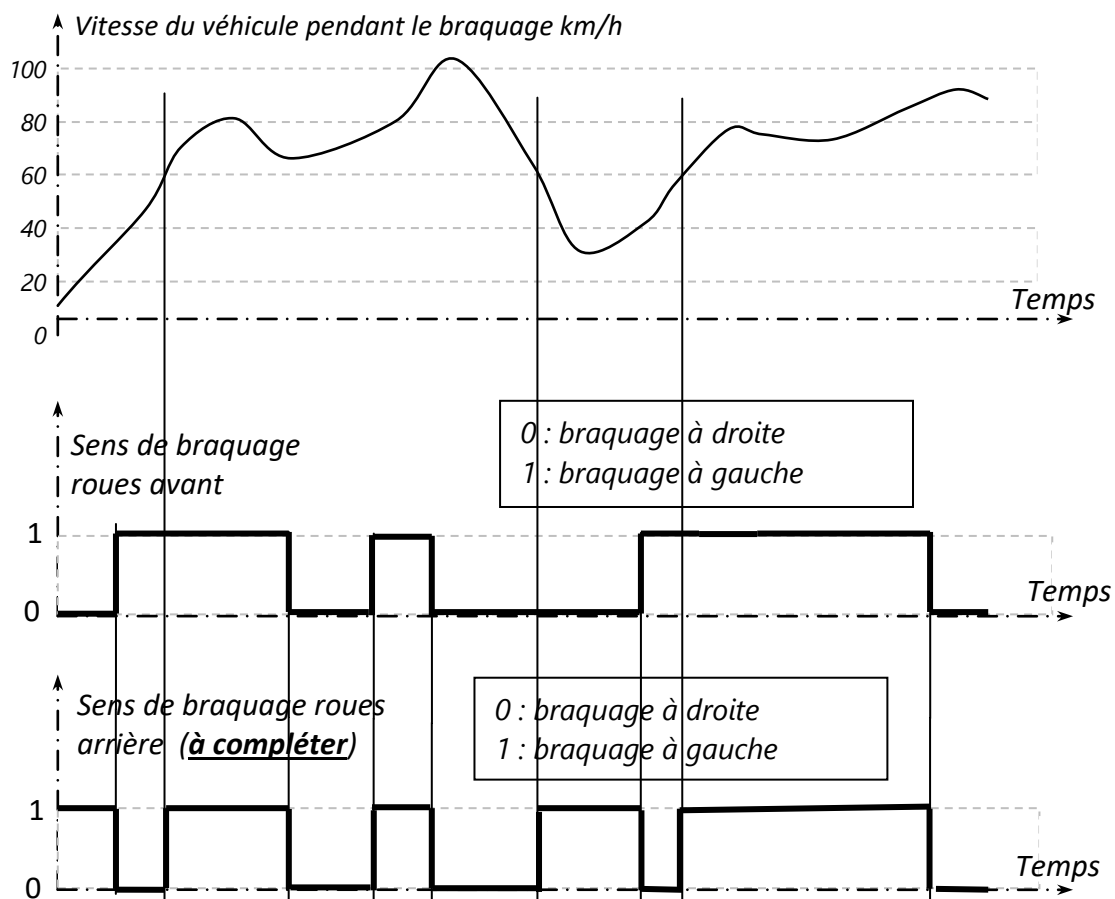
Liaison	Nom complet	Torseur cinématique	Torseur d'action mécanique
Liaison (0-1)	Liaison glissière de direction $\vec{x}_0$	$\vartheta(1/0) = \begin{Bmatrix} 0 & u_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \begin{matrix} \\ \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \end{matrix}$	$0 \xrightarrow{L_{01}} 1 = \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_A \begin{matrix} \\ \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \end{matrix}$
Liaison (1-2)	Liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$	$\vartheta(2/1) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 0 \end{Bmatrix}_A \begin{matrix} \\ \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \end{matrix}$	$1 \xrightarrow{L_{12}} 2 = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A \begin{matrix} \\ \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \end{matrix}$
Liaison (5-6)	Liaison pivot d'axe $(D, \vec{x}_5)$	$\vartheta(6/5) = \begin{Bmatrix} \alpha_{65} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D \begin{matrix} \\ \\ (\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5) \end{matrix}$	$5 \xrightarrow{L_{56}} 6 = \begin{Bmatrix} X_{56} & 0 \\ Y_{56} & M_{56} \\ Z_{56} & N_{56} \end{Bmatrix}_D \begin{matrix} \\ \\ (\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5) \end{matrix}$

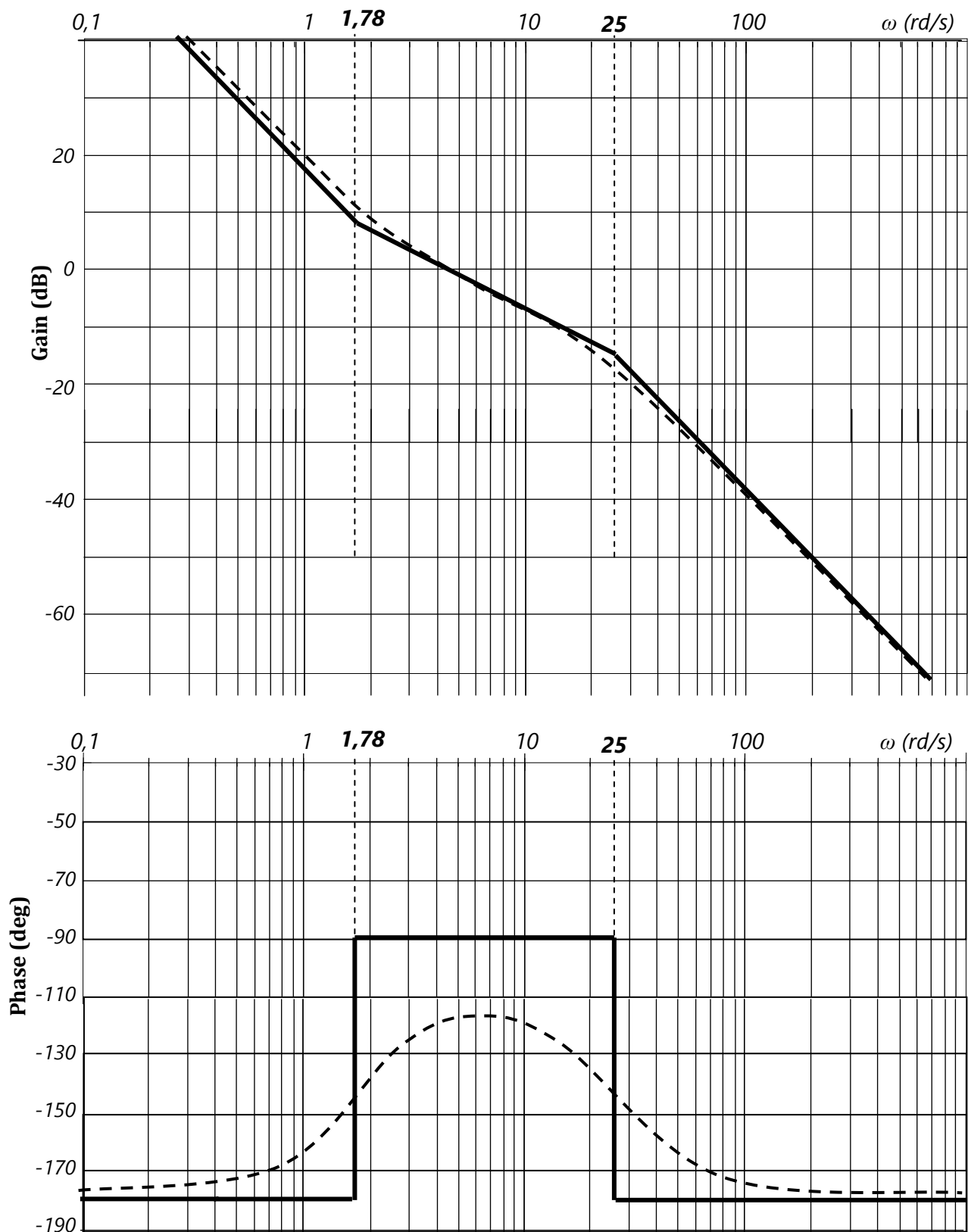
Question 1.5 :

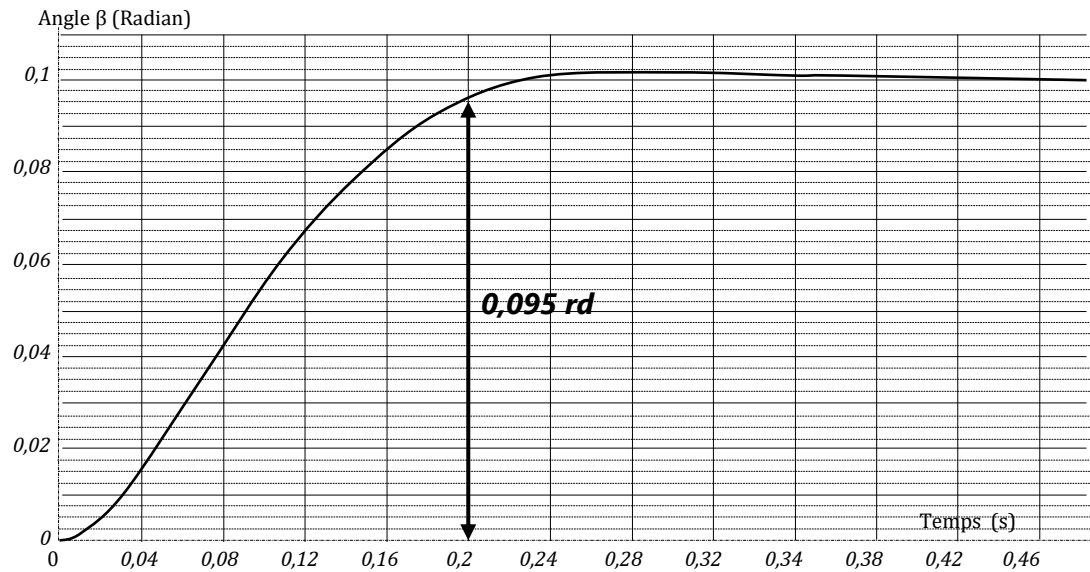
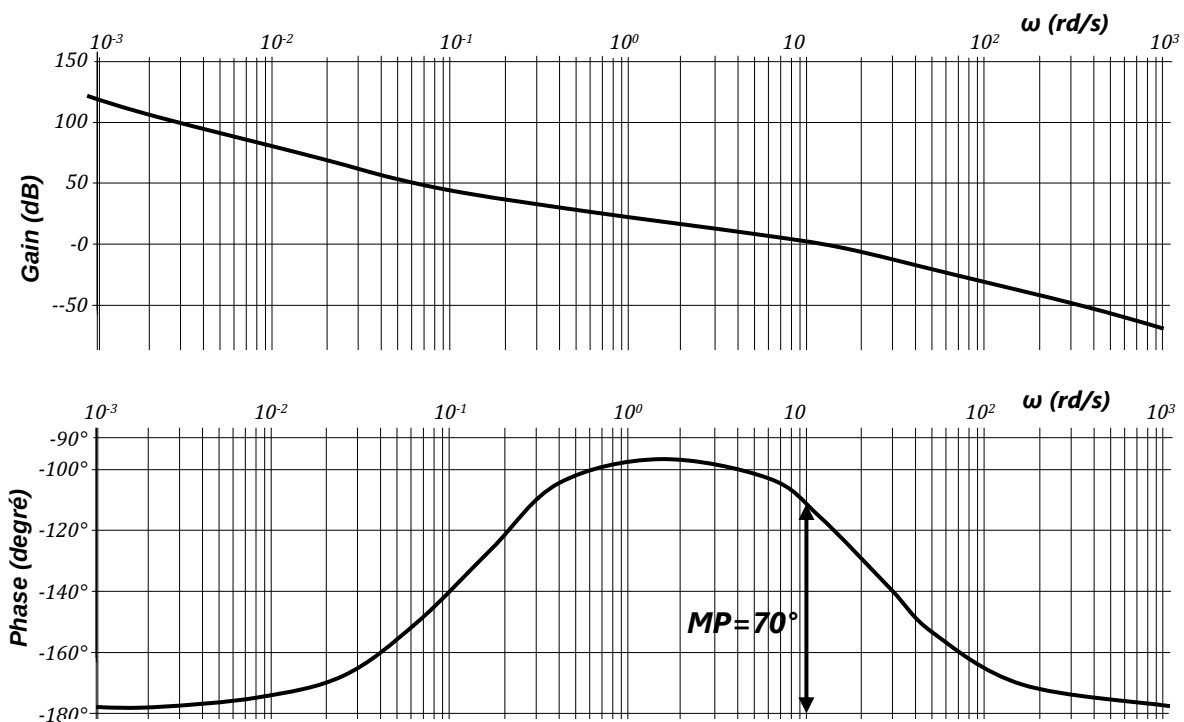
Nom de La liaison équivalente entre (4) et (0): **Sphérique à doigt**

Les mouvements possibles sont : **Rotation d'axe $(C, \vec{x}_4)$ et rotation d'axe : $(C, \vec{z}_0)$**

Question 2.3 :



DOCUMENT REPONSE DR3**Question 6.17.**

DOCUMENT REPOSE DR4**Question 6.21:****Figure 17 : Réponse indicielle du système corrigé.****Figure 18 : Diagrammes de Bode de la FTBO du système corrigé.**

- Temps de réponse à 5 % du système corrigé : **0,2 s**
- Dépassement en % : **2,5 %**
- Marge de phase : **70°**
- Ecart en régime permanent : $\varepsilon_{\infty} = 0$
- Conclusion : **Le cahier des charges est respecté**