

Déambulateur robotisé RW

Exercice préliminaire :

Détermination de la loi entrée/sortie cinématique.

Q1.

$$\begin{aligned} \{V(1/0)\} &= \begin{Bmatrix} \omega_{10} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O & \{V(3/2)\} &= \begin{Bmatrix} \omega_{32} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \\ \{V(2/0)\} &= \begin{Bmatrix} \omega_{20} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A & \{V(3/1)\} &= \begin{Bmatrix} \omega_{31} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \end{aligned}$$

Q2. $\vec{V}(C,1/0) = L \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$.

Q3. $\vec{V}(B,2/0) = L \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$.

Q4. $\vec{V}(B,2/0) = \vec{V}(C,1/0)$

$$\vec{V}(B,2/3) + \vec{V}(B,3/0) = \vec{V}(C,1/3) + \vec{V}(C,3/0)$$

$$\vec{V}(B,3/0) = \vec{V}(C,3/0) \Rightarrow$$

$$\vec{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{BC} = \vec{0} = \omega_{30} \cdot \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$$

Q5. Le mouvement de la plate-forme (3) par rapport au repère R_0 est un mouvement de

translation circulaire. $\{V(3/0)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ L \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_D$.

Q6. $\vec{V}(E,1/0) = a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$.

Q7.

$$\{V(5/0)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{50} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_F \quad \{V(1/4)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{14} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$$

Q8. $\{V(4/5)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \cdot \vec{y}_5 \end{Bmatrix}_E$.

Q9. $\vec{V}(E,4/0) = -\lambda \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_5 + \dot{\lambda} \cdot \vec{y}_5$.

Q10. $\vec{V}(E,1/0) = \vec{V}(E,1/4) + \vec{V}(E,4/0)$.

Q11. $a \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 = -\lambda \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_5 + \dot{\lambda} \cdot \vec{y}_5$ en projection sur $(\vec{x}_5, \vec{y}_5)$

$$\lambda \cdot \dot{\beta} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \sin(\theta - \beta) \quad \dot{\lambda} = a \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta - \beta)$$

Q12. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FE} \Rightarrow a \cdot \vec{x}_1 = d \cdot \vec{x}_0 - h \cdot \vec{y}_0 + \lambda \cdot \vec{y}_5$

$$a \cdot \cos \theta = d - \lambda \cdot \sin \beta \quad a \cdot \sin \theta = -h + \lambda \cdot \cos \beta$$

Q13. $a \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = d \cdot \sin \theta - \lambda \cdot \sin \beta \cdot \sin \theta$

$$a \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = -h \cdot \cos \theta + \lambda \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta$$

$$0 = d \cdot \sin \theta + h \cdot \cos \theta - \lambda \cdot \cos(\theta - \beta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{\dot{\lambda}}{d \cdot \sin \theta + h \cdot \cos \theta}$$

Partie 1 : Détermination de l'effort du vérin lors de la transition assis/debout.

Q14. Equilibre de S :

$$\text{T.R.S. } \vec{R}(\bar{S} \rightarrow S) = \vec{0} \text{ et T.M.S. en O } \vec{M}_O(\bar{S} \rightarrow S) = \vec{0}.$$

Q15. On isole le bras inférieur (1) et on applique le théorème du moment statique en O :

$$\vec{M}_O(\bar{1} \rightarrow 1) = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_O(0 \rightarrow 1) + \vec{M}_O(\text{vérin} \rightarrow 1) + \vec{M}_O(3 \rightarrow 1) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O(0 \rightarrow 1) = \vec{0} \quad \left| \quad \vec{M}_O(\text{vérin} \rightarrow 1) = a \cdot F_v \cdot \cos(\theta - \beta) \cdot \vec{z}_0 \quad \right| \quad \vec{M}_O(3 \rightarrow 1) = L \cdot (-X_{31} \cdot \sin \theta + Y_{31} \cdot \cos \theta) \cdot \vec{z}_0$$

$$F_v = \frac{L}{a} \cdot \frac{X_{31} \cdot \sin \theta - Y_{31} \cdot \cos \theta}{\cos(\theta - \beta)}$$

Q16. Le bras supérieur 2 est sous l'action de deux glisseurs de même direction (AB).

$$\text{On applique le TMS en A} \quad \left| \quad \vec{M}_A(\bar{2} \rightarrow 2) = \vec{0} \quad \right| \quad \vec{M}_A(0 \rightarrow 2) + \vec{M}_A(3 \rightarrow 2) = \vec{0} \quad \left| \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}(3 \rightarrow 2) = \vec{0} \right|$$

$$L \cdot \vec{x}_1 \wedge (X_{32} \cdot \vec{x}_0 + Y_{32} \cdot \vec{y}_0) = \vec{0} \quad \left| \quad -X_{32} \cdot \sin \theta + Y_{32} \cdot \cos \theta = 0 \quad \right| \quad Y_{23} = X_{23} \cdot \tan \theta \quad \left| \quad \text{On peut déduire le résultat graphiquement.} \right|$$

Q17. On isole la poignée 3 et on applique le théorème de la résultante statique.

$$\vec{R}(\bar{3} \rightarrow 3) = \vec{0}$$

$$\vec{R}(1 \rightarrow 3) + \vec{R}(2 \rightarrow 3) + \vec{R}(\text{utilisateur} \rightarrow 3) = \vec{0}$$

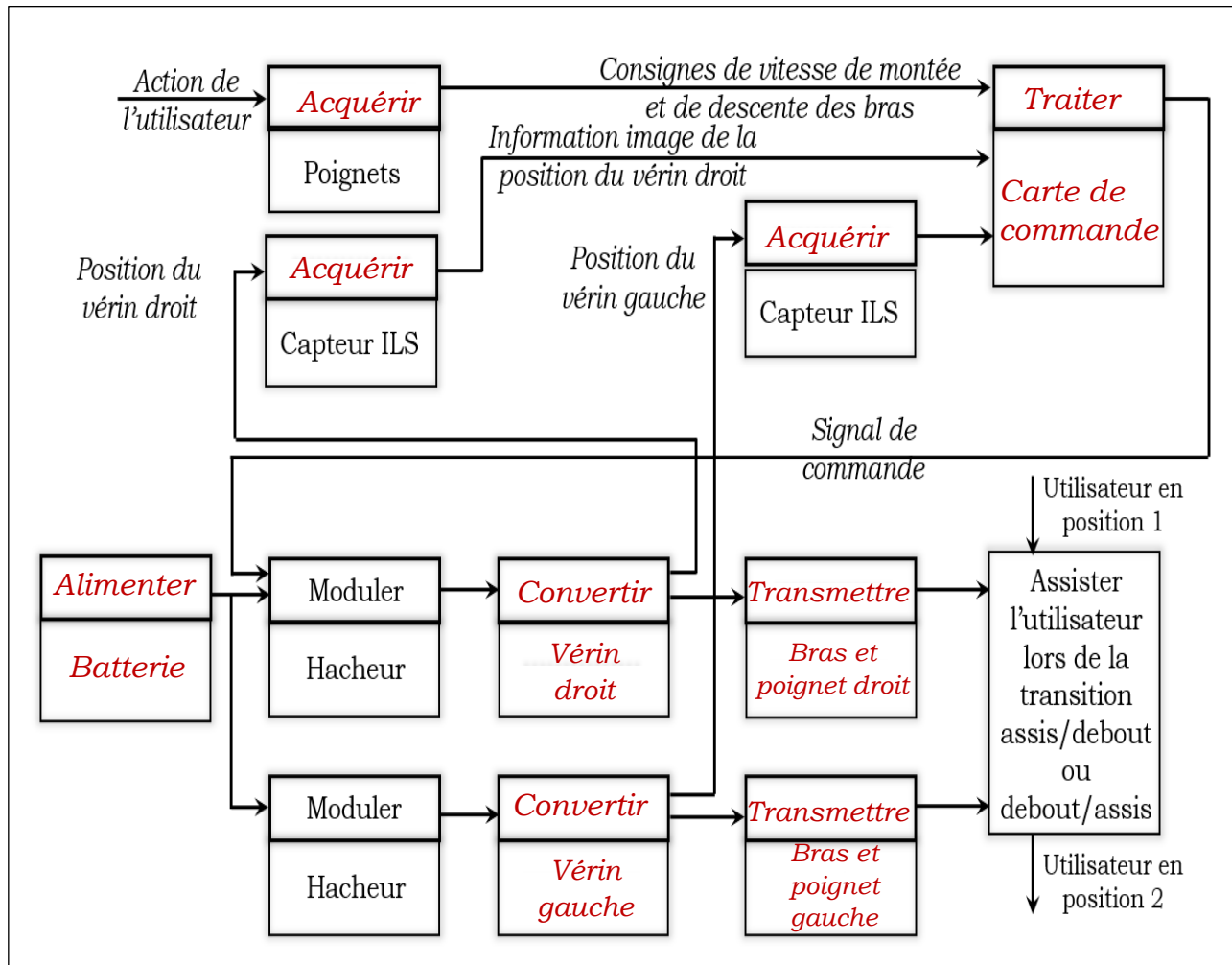
$$-X_{31} + X_{32} = 0$$

$$-Y_{31} + Y_{32} - Fu = 0$$

Q18. $F_v = \frac{L}{a} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos(\theta - \beta)} \cdot F_u$

Partie 2 : Mise en œuvre de l'asservissement en vitesse des vérins.

Q19.



On considère l'ensemble de la chaîne cinématique

$$\Sigma = \{\text{bras inférieur 1, bras supérieur 2, poignée 3}\}$$

Q20. $T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_3 L^2 \dot{\theta}^2 \quad \left| \quad T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad \right| \quad J = J_1 + J_2 + M_3 L^2$

Q21. $P_{\text{ext}} = P_{\text{liaisons}/0} + P(\text{vérin} \rightarrow 1/0) + P(\text{Util} \rightarrow 3/0)$

$$P_{\text{ext}} = F_v \dot{\lambda} - F_u L \dot{\theta} \cos \theta$$

$$P_{\text{liaisons}/0} = 0 \text{ Liaisons parfaites}$$

$$P(\text{vérin} \rightarrow 1/0) = F_v \dot{\lambda}$$

$$P(\text{Util} \rightarrow 3/0) = -F_u L \dot{\theta} \cos \theta$$

Q22. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $\Sigma = \{\text{bras inférieur 1, bras supérieur 2, poignée 3}\}$

$$\frac{dT}{dt}(\Sigma/0) = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

$$P_{\text{int}} = 0 \text{ Liaisons parfaites.}$$

$$J \ddot{\theta} = F_v \dot{\lambda} - F_u L \dot{\theta} \cos \theta$$

$$J \ddot{\theta} = F_v \frac{a}{\lambda} (d \sin \theta + h \cos \theta) - F_u L \cos \theta$$

Facultatif

$$\mathbf{Q23.} \quad \eta_r = \frac{C_r(t) \cdot \omega_r(t)}{C_m(t) \cdot \omega_m(t)} \Rightarrow C_r(t) = \eta_r \cdot \frac{C_m(t)}{k} \quad \eta_v = \frac{F_v(t) \cdot \dot{\lambda}(t)}{C_r(t) \cdot \omega_r(t)} \Rightarrow F_v(t) = \eta_v \cdot \frac{C_r(t)}{\frac{p_v}{2\pi}}$$

$$F_v(t) = \eta_r \cdot \eta_v \cdot \frac{2\pi}{k \cdot p_v} \cdot C_m(t)$$

Modélisation du moteur à courant continu :

Q24. On suppose les conditions initiales nulles et on applique la transformées de Laplace :

$U(p) = R.I(p) + E(p) \quad (1)$	$E(p) = k.\Omega_m(p) \quad (3)$
$C_m(p) = k.I(p) \quad (2)$	$C_m(p) - K.F_U(p) = J_S \cdot p.\Omega_m(p) \quad (4)$

Q25.	$B_1(p) = \frac{1}{R}$	$B_2(p) = k$	$B_3(p) = \frac{1}{J_S \cdot p}$	$B_4(p) = k$	$B_5(p) = K$
-------------	------------------------	--------------	----------------------------------	--------------	--------------

On pose $\Omega_m(p) = H_m(p) \cdot U_m(p) - H_f(p) \cdot F_U(p)$:

Q26.	$H_m(p) = \frac{B_1(p) \cdot B_2(p) \cdot B_3(p)}{1 + B_1(p) \cdot B_2(p) \cdot B_3(p) \cdot B_4(p)}$	$H_f(p) = \frac{B_3(p)}{1 + B_1(p) \cdot B_2(p) \cdot B_3(p) \cdot B_4(p)} \cdot B_5(p)$
-------------	---	--

Analyse des performances :

Q27.	$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$	$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{V_c(p) + \frac{B}{1+T \cdot p} \cdot F_U(p)}{1 + C(p) \cdot A \cdot \frac{B}{1+T \cdot p}}$	$\varepsilon_s = \frac{V_{co} + B \cdot F_{uo}}{1 + A \cdot B}$
	$\varepsilon_{s_Fu} = -v(+\infty) \Big _{Vc=0} = \frac{B \cdot F_{uo}}{1 + A \cdot B}$	$\Delta v = \frac{B}{1 + A \cdot B} \cdot (F_{ug} - F_{ug})$	$\Delta v = 0,84 m/s$

$$\mathbf{Q28.} \quad \varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{V_c(p) + \frac{B}{1+T \cdot p} \cdot F_U(p)}{1 + \frac{K_i}{p} \cdot A \cdot \frac{B}{1+T \cdot p}} = 0. \text{ Exigence de précision respectée.}$$

$$\mathbf{Q29.} \quad G_{BO}(p) = \frac{K_i \cdot A \cdot B}{p \cdot (1 + T \cdot p)} \quad K_{BO} = K_i \cdot A \cdot B$$

Q30. Marge de phase $MP = 180^\circ + \varphi(\omega_{0dB})$ et $\|G_{BO}(j\omega_{0dB})\| = 1$ (0 en dB)

$MP = 45^\circ$	$\Rightarrow \varphi(\omega_{0dB}) = -135^\circ = -90^\circ - \arctan(T \cdot \omega_{0dB})$	$\Rightarrow \omega_{0dB} = \frac{1}{T} = 2 \text{ rad/s}$
$\ G_{BO}(j\omega_{0dB})\ = 1 = \frac{K_i \cdot A \cdot B}{\omega_{0dB} \cdot \sqrt{2}}$	$K_i = \frac{\omega_{0dB} \cdot \sqrt{2}}{A \cdot B}$	$K_i = 8,57 \text{ s}^{-1}$

$$\text{Q31. } G_{BF}(p) = \frac{G_{BO}(p)}{1 + G_{BO}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_i \cdot AB} + \frac{T}{K_i \cdot AB} \cdot p^2} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Le système le plus rapide sans dépassement $\xi = 1$

$$\frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} = \frac{1}{K_i \cdot AB} \quad \left| \quad \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{T}{K_i \cdot AB} \right| \quad \left(\frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \right)^2 = 4 \cdot \xi^2 \cdot \frac{T}{K_i \cdot AB} = \left(\frac{1}{K_i \cdot AB} \right)^2 \quad \left| \quad K_i = \frac{1}{4 \cdot T \cdot AB} = 1,51 \text{ s}^{-1} \right.$$

$$\text{Q32. } \xi = 1 \Rightarrow t_{r5\%} \cdot \omega_0 = 5 \quad \left| \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_i \cdot AB}{T}} = \frac{1}{2 \cdot T} = 1 \text{ rad.s}^{-1} \right| \quad \Rightarrow t_{r5\%} = 5 \text{ s}$$

Pour $K_i = K_{iMAX} = 1,51 \text{ s}^{-1}$

Exigences	Critère	Niveau	
Stabilité	Marge de phase	45° minimum	Respectée
Amortissement	Dépassement	Aucun	Respectée
Précision	Erreur statique	Nul	Respectée
Rapidité	Temps de réponse	0,5 s maximum	Non respectée

$$\text{Q33. } G_{BO}(p) = K_i \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot \frac{AB}{1 + T \cdot p} = \frac{K_i \cdot AB}{T_i} \cdot \frac{1}{p} \quad G_{BF}(p) = \frac{G_{BO}(p)}{1 + G_{BO}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{K_i \cdot AB} \cdot p}$$

$$\Rightarrow t_{r5\%} = 3 \cdot \frac{T_i}{K_i \cdot AB} = 0,5 \text{ s} \quad \Rightarrow K_i = 3 \cdot \frac{T_i}{0,5 \cdot AB} = 9,09 \text{ s}^{-1}$$

Q34. La F.T.B.O. est un intégrateur $\Rightarrow MP = 90^\circ$

La F.T.B.F. est un 1^{er} ordre $\Rightarrow$ pas de dépassement

Exigences	Critère	Niveau	
Stabilité	Marge de phase	45° minimum	Respectée
Amortissement	Dépassement	Aucun	Respectée
Précision	Erreur statique	Nul	Respectée
Rapidité	Temps de réponse	0,5 s maximum	Respectée

Partie 3

$$\text{Q36. } V(t) = r \cdot \frac{D_{roue}}{2} \cdot \omega_m(t)$$

$$\text{Q37. } T(\text{robot} / \text{sol}) = \frac{1}{2} \cdot (M \cdot V^2(t) + (J_m + J_r) \cdot \omega_m^2(t) + J_{roue} \cdot \omega_{Rm}^2(t))$$

$$\text{Q38. } T(\text{robot} / \text{sol}) = \frac{1}{2} \cdot M_{\text{eq}} \cdot V^2(t)$$

$$M_{\text{eq}} = M + \left(\frac{J_m + J_r}{r^2} + J_{roue} \right) \cdot \left(\frac{2}{D_{roue}} \right)^2$$

Pour la suite on suppose $M_{\text{eq}} \approx M$.

Q39. $P_{\text{ext}} = 0$ (Contact au niveau des roues se fait sans glissement et le robot est en mouvement de translation de direction perpendiculaire à $\vec{g}$).

Q40. $P_{int} = P_{liaisons} + 2.(P_{moteur} + P_{dissipée})$

$$P_{int} = 2.\eta_{red}.C_m(t).\omega_m(t)$$

$P_{liaisons} = 0$ Liaisons parfaites

$P_{moteur} = C_m(t).\omega_m(t)$

$P_{dissipée} = (\eta_{red} - 1).C_m(t).\omega_m(t)$

Q41. Le T.E.C. appliqué au robot s'écrit : $\frac{d}{dt}T(\text{robot} / \text{sol}) = P_{ext} + P_{int}$

$M.\frac{d}{dt}V(t).V(t) = 2.\eta_{red}.C_m(t).\omega_m(t)$

$M.K_R^2.\frac{d}{dt}\omega_m(t) = 2.\eta_{red}.C_m(t).$

$C_m(t) = J.\frac{d}{dt}\omega_m(t)$

$J = \frac{M.K_R^2}{2.\eta_{red}}$

Q42. $\frac{d}{dt}\omega_m(t) = \frac{2}{r.D_{roue}}.\frac{d}{dt}V(t)$

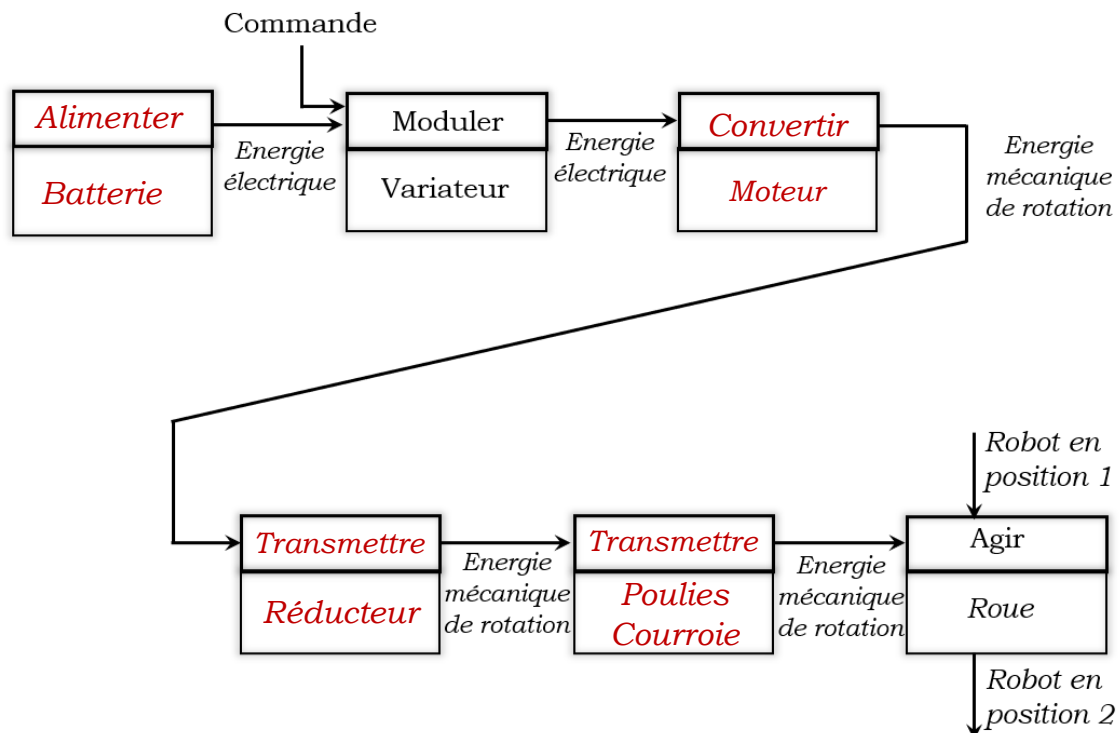
$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{V_{rob_min}}{1} = 0,5 \text{ m.s}^{-2}$

$\frac{d}{dt}\omega_m(t) = \frac{2.38,59}{0,15}.0,5 = 257,26 \text{ rad.s}^{-2}$

$J = \frac{M.K_R^2}{2.\eta_{red}} = \frac{45.3,77.10^{-6}}{2.0,89} = 1,9.10^{-4} \text{ Kg.m}^2$

$C_m = 0,024 \text{ N.m}$

Q35.



Partie 4 :

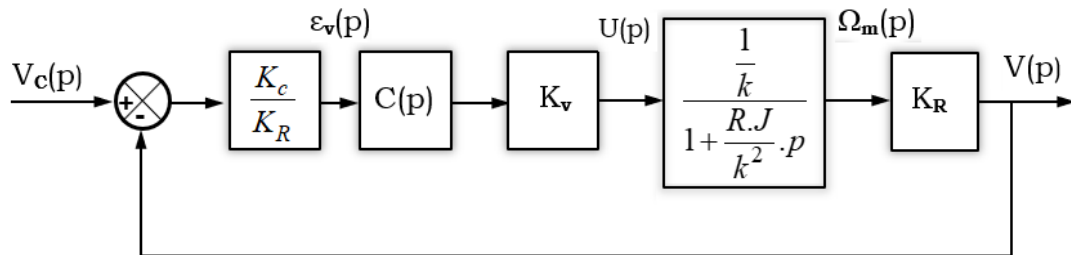
Q43. En régime permanent, on espère avoir pour cet asservissement $v_c = v$ et $\varepsilon_v = 0$:

$$\varepsilon_v(p) = K_a.V_c(p) - K_c.\Omega_m(p) \Rightarrow \varepsilon_v(p) = K_a.V_c(p) - \frac{K_c}{K_R}.V(p)$$

$$\Rightarrow K_a = \frac{K_c}{K_R}.$$

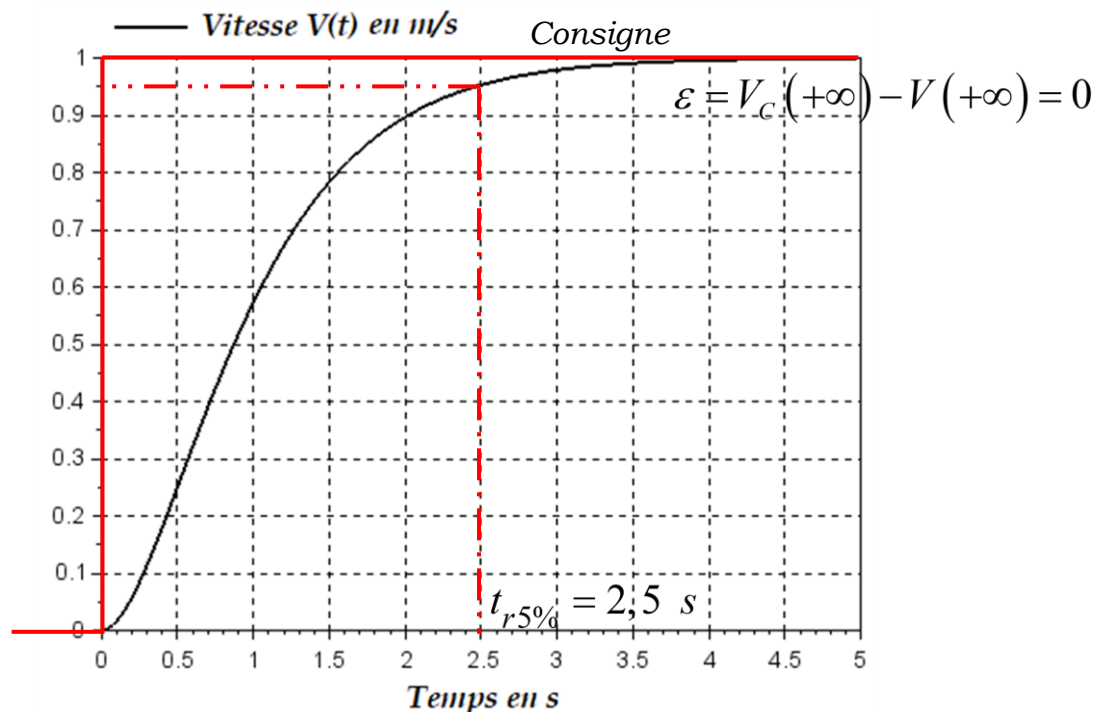
Q44. $\varepsilon_v(p) = (V_c(p) - V(p)) \cdot \frac{K_c}{K_R}$

$$\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{k}{R.J.p}}{1 + \frac{k}{R.J.p} \cdot k} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{R.J}{k^2} \cdot p}$$



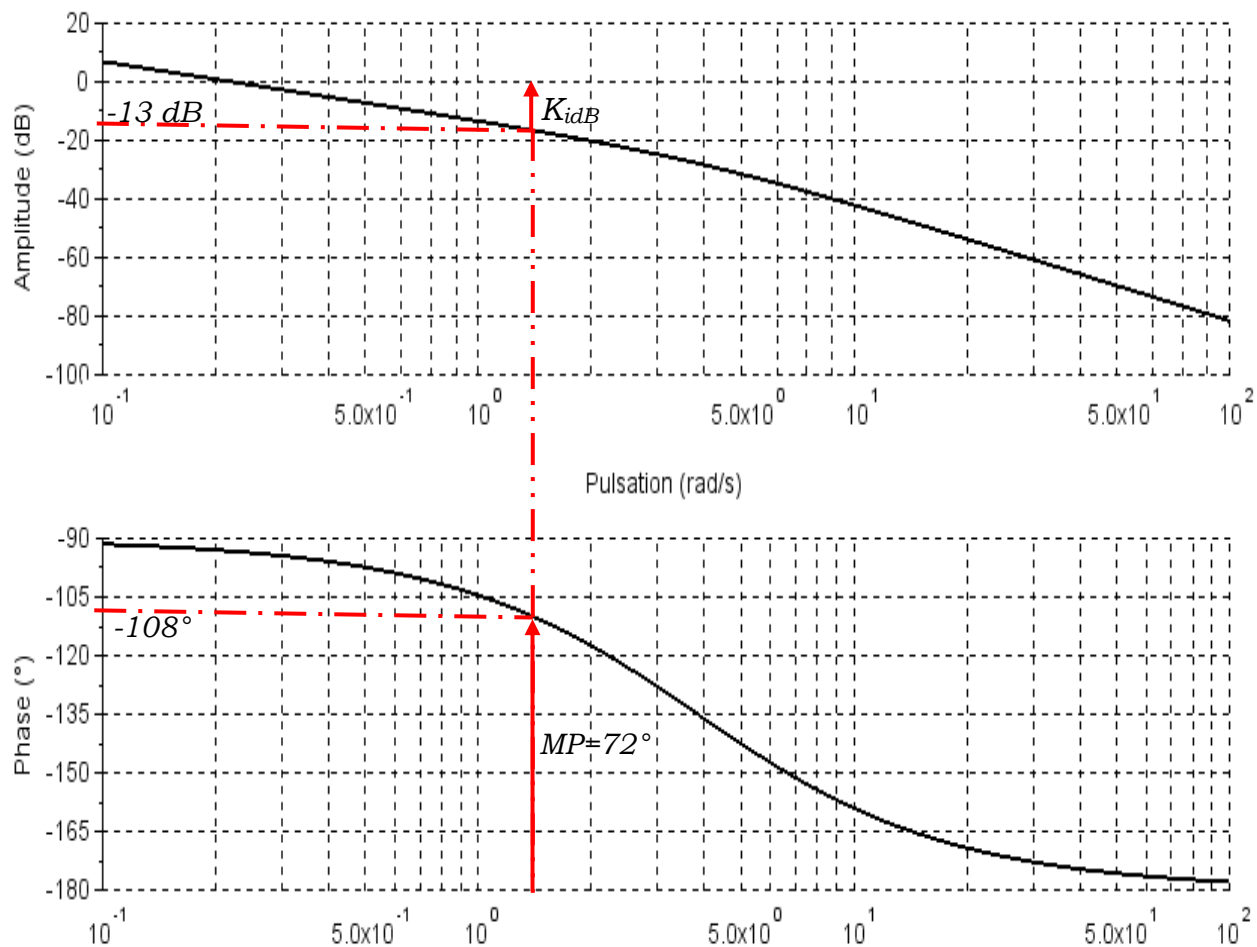
$$K = \frac{K_c \cdot K_v}{k} \text{ et } T = \frac{R.J}{k^2}.$$

Q45.



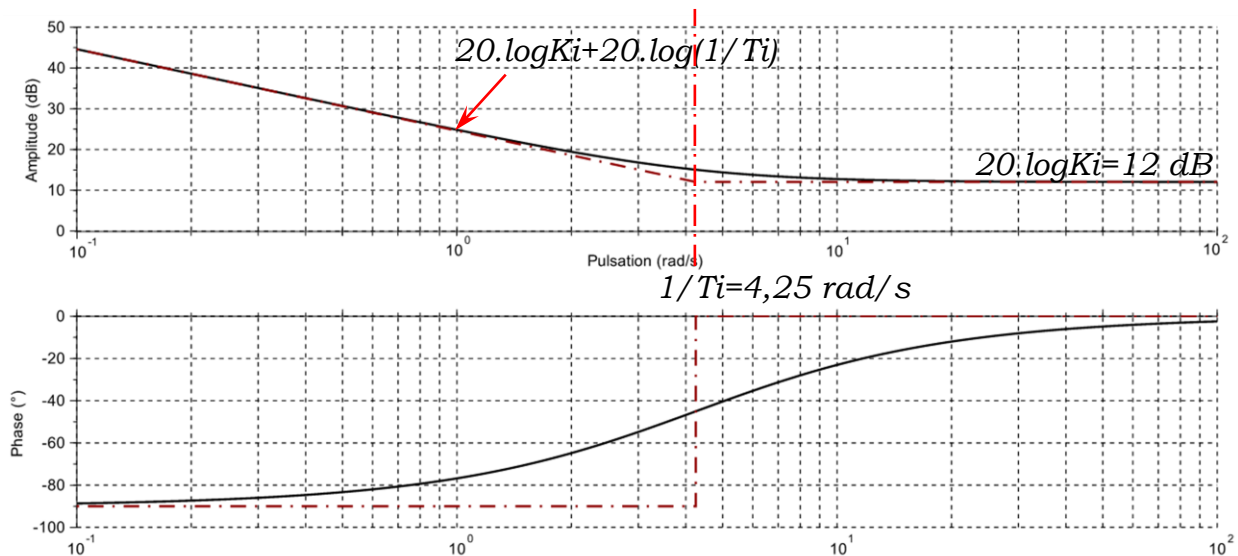
Exigences	Critère	Niveau	
Amortissement	Dépassement	Aucun	Respectée
Précision	Erreur statique	Nul	Respectée
Rapidité	Temps de réponse	1 s maximum	Non respectée

Q46.



Exigences	Critère	Niveau	
Stabilité	Marge de phase	45° minimum	Respectée

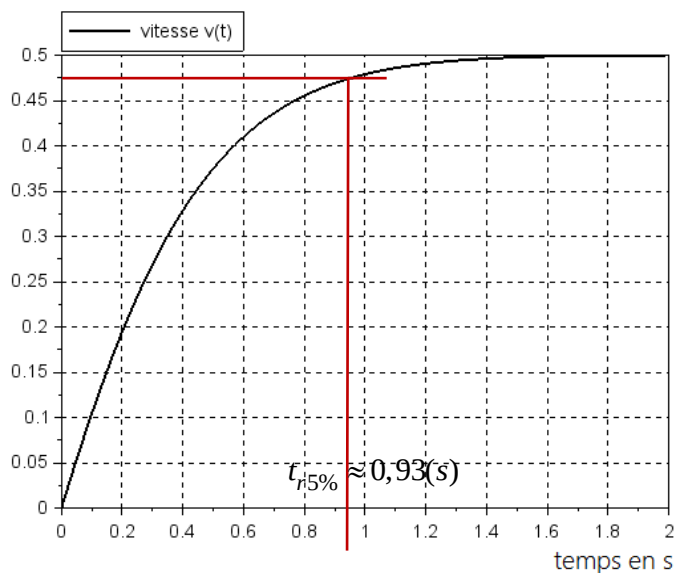
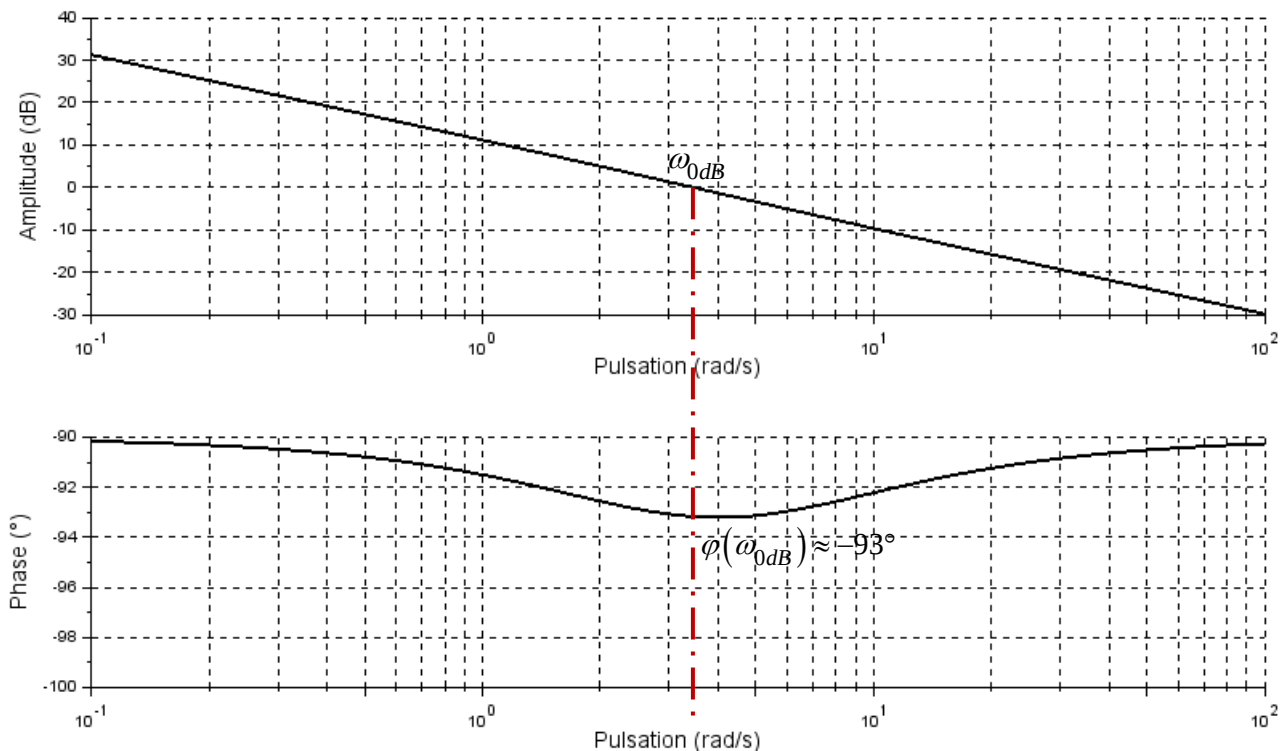
Q47.



On donne sur le document réponse DR4.

- Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée.
- La réponse temporelle du système à une entrée échelon $v_c(t) = V_{co} \cdot u(t)$ avec $V_{co} = 0,5 \text{ (m/s)}$.

Q48. Les quatre critères du cahier des charges sont-ils respectés ? Faire apparaître sur le document réponse DR4 les grandeurs mesurées.



Stabilité
Marge de phase
MP=87°
Amortissement
Dépassement
Aucun dépassement
Précision
Erreur statique
Nulle
Rapidité
Temps de réponse à 5%
0,93 (s)